Cohomologie de De Rham et applications

Florent Mayencourt

Professeur : Troyanov Marc

EPFL, Semestre d'été 2009

Car il est bien plus beau de savoir quelque chose
de tout que de savoir tout d'une chose ; cette universalité est la plus belle.
Blaise Pascal

Résumé

Le présent travaille se veut de présenter la théorie de la cohomomolgie de De Rahm. Nous supposerons déjà connu la théorie concernant les formes différentiables sur des variétés, qui constitue la base même de la théorie de De Rahm. Nous monterons ensuite comment calculer quelques cohomologies puis nous nous attaquerons à la relation entre la cohomologie de De Rahm et la cohomologie simpliciale. Pour finir, nous parlerons brièvement de quelques cas particuliers de cohomologie.

Table des matières

CHAPITRE 1

Cohomologie de De Rahm

Ce chapitre est tiré du livre de Madsen [2].

1.1 Définitions et lemme de Poincaré

Définition 1.1.1
Soit X une variété différentiable. Une forme différentielle ω sur X est dite fermée *si $d\omega = 0$. On notera $Z^k(X, d)$ l'ensemble des k-formes fermées sur X.*
Une forme est dite exacte *si elle est la différentielle d'une autre forme sur X ; en d'autres termes, s'il existe une forme différentielle τ telle que $d\tau = \omega$. On notera $B^k(X, d)$ l'ensemble des k-formes exactes sur X.*

Remarque 1.1.2
Il nous faut rappeler ici que toute forme exacte est aussi fermée, car $d^2 = 0$. Cela est très important pour la suite.

Définition 1.1.3
L'espace vectoriel quotient $H^k(X, d) = Z^k(X, d)/B^k(X, d)$ est appelé cohomologie de De Rahm. *Si de plus X est compacte, alors sa dimension, fini, est appelée* nombre de Betti, *noté $b_k(X)$.*

Exemple 1.1.4
Soit X une variété connexe par arcs. Alors $H^0(X, d) \simeq \mathbb{R}^1$. En effet, puisqu'il

n'y a pas de formes de degré inférieur à zéro, on a que $B^0(X,d) = 0$. Ainsi

$$H^0(X,d) = Z^0(X,d) = \{f \in C^\infty(X,\mathbb{R}^1); df = 0\}.$$

Soit U un voisinage connexe par arcs de X muni de la base $(x_1,\ldots,x_n)$, alors $df = 0$ signifie que

$$0 = df = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)dx_i.$$

Par définition d'une base, cela veut dire que $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = 0$ pour tout i. Puisque X est connexe par arcs et que f est constante sur chaque voisinage connexe par arcs, alors f est constante sur tout X. Ainsi $H^0(X,d) \simeq \mathbb{R}^1$.

Lemme 1.1.5
Soit X une variété différentiable. Alors pour tout k, on considère la suite suivante :

$$\begin{tikzcd} C^\infty(X,\Lambda^{k-1}(X)) \arrow[r, "d"] & C^\infty(X,\Lambda^k(X)) \arrow[r, "d"] \arrow[l, bend left, dotted, "h_{k-1}"] & C^\infty(X,\Lambda^{k+1}(X)). \arrow[l, bend left, dotted, "h_k"] \end{tikzcd}$$

S'il existe des fonctions linéaires h_j définies comme ci-dessus de telle sorte que $h_k \circ d + d \circ h_{k-1}$ est l'identité sur $C^\infty(X,\Lambda^k(X))$, alors $H^k(X,d) = 0$, i.e. toute k-forme fermée est exacte.

Démonstration. Soit $\omega \in C^\infty(X,\Lambda^k(X))$ une k-forme fermée. Alors

$$\omega = (h_k \circ d + d \circ h_{k-1})(\omega) = h_k(d\omega) + d(h_{k-1}\omega) = d(h_{k_1}\omega).$$

q.e.d

Théorème 1.1.6 (Généralisation du lemme de Poincarré)
Soit U une variété différentiable telle qu'il existe une fonction différentiable $\Psi : U \times I_\varepsilon \to U$, où $I_\varepsilon = [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, de telle sorte que $\Psi(-,1) = \mathrm{Id}_U$ et $\Psi(u,0) = u_0$ pour tout $u \in U$, $u_0 \in U$ quelconque. Alors $H^k(U,d) = 0$ pour tout $k > 0$.

Démonstration. Nous allons construire h_{k-1} et h_k comme dans le lemme. Soient donc $\omega = g\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in C^\infty(U,\Lambda^k(U))$ et $y \in U$. Alors on définit h_{k-1} par :

$$h_{k-1}(\omega)(y) = \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1} (y,t) \;\cdot\; g \circ \Psi(y,t)\,dt \right) \mu$$

où $\mu = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} x_{i_j}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \ldots dx_{i_k}$. On remarque facilement que $d\mu = k\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.
Calculons maintenant chaque terme de la somme de l'hypothèse du lemme :

$$
\begin{aligned}
&(d \circ h_{k-1})(\omega)(y) \\
&= d\left(\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1} (y,t)\, g \circ \Psi(y,t)\, dt\right) \mu\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1} (y,t)\, g \circ \Psi(y,t)\, dt\right) dx_j \wedge \mu \\
&+ \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1} (y,t)\, g \circ \Psi(y,t)\, dt\right) d\mu \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1} (y,t) \frac{\partial}{\partial x_j}\, g \circ \Psi(y,t)\, dt\right) dx_j \wedge \mu \\
&+ \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k-1} (y,t)\, g \circ \Psi(y,t)\, dt\right) d\mu \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k} (y,t) \frac{\partial g}{\partial x_j} \left(\Psi(y,t)\right)\, dt\right) dx_j \wedge \mu \\
&+ k \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k} (y,t)\, g \circ \Psi(y,t)\, dt\right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.
\end{aligned}
$$

D'autre part on a

$$
\begin{aligned}
(h_j \circ d)(\omega)(y) &= h_k \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^{k} (y,t)\, g \circ \Psi(y,t)\, dt\right) (x_j\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} - dx_j \wedge \mu).
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a

$$(d \circ h_{k-1} + h_k \circ d)(\omega)(y)$$

$$= \left(k \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^{k-1} g \circ \Psi dt \right) + \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^k \frac{\partial g}{\partial x_j} (\Psi(x,t)) dt \right) \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \left(\int_0^1 \left(k \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^{k-1} (y,t)\, g \circ \Psi(y,t) + tk \frac{d}{dt}\, g \circ \Psi(y,t) \right) dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^k (y,t)\, g \circ \Psi(y,t) \right) dt \right) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= g(y) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \omega(y).$$

Puisque les h_{k-1} et h_k sont définis pour tout $k > 0$, par le lemme on a $H^k(U, d) = 0$ pour tout $k > 0$.

q.e.d

Corollaire 1.1.7
Soit B^n la boule dans $\mathbb{R}^n$. $H^k(B^n, d) = 0$ pour tout $k > 0$. Ce résultat est connu sous le nom de lemme de Poincaré.

1.2 Suite de Mayer-Vietoris

Pour l'instant, nous avons défini la cohomologie de De Rahm comme un espace vectoriel quotient. Cependant il est assez difficile de la calculer explicitement. Un moyen couremment utilisé est de scinder une variété en deux et d'exprimer sa cohomologie comme fonction de chacune de ses parties et de leur intersection.

Théorème 1.2.1
Soient U_1 et U_2 deux variétés différentielles et $U = U_1 \cup U_2$. Pour $\nu = 1, 2$, on définit $i_\nu : H^k(U_\nu, d) \to H^k(U, d)$ et $j_\nu : H^k(U_1, d) \cap H^k(U_2, d) \to H^k(U_\nu, d)$ les inclusions.

Alors on peut trouver ∂ telle que la suite suivante

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \arrow[dll, "\partial"'] \\
H^k(U,d) \arrow[r, "I^k"'] & H^k(U_1,d) \oplus H^k(U_2,d) \arrow[r, "J^k"] & H^k(U_1 \cap U_2, d) \arrow[dll, "\partial"'] \\
H^{p+1}(U) \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

est exacte, où $I^k(\omega) = (i_1(\omega), i_2(\omega))$ et $J^k(\omega_1, \omega_2) = j_1(\omega_1) - j_2(\omega_2)$. On appelle cela la suite de Mayer-Vietoris.

Nous démontrerons la suite pour des formes à supports compacts :

Lemme 1.2.2
Pour une variété $M = U \cup V$, la suite suivante

$$0 \longrightarrow \Lambda^k(U \cap V) \xrightarrow{j'_U \oplus -j'_V} \Lambda^k(U) \oplus \Lambda^k(V) \xrightarrow{i'_U + i'_V} \Lambda^k(M) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Clairement, $j'_U \oplus -j'_V$ est injective. Pour la surjectivité de $i'_U + i'_V$, soit ω une k-forme à support compacte sur M. Soit $\{\phi_U, \phi_V\}$ une partition de l'unité pour le recouvrement $\{U, V\}$. Ainsi

$$\omega = \phi_U \omega + \phi_v \omega = i'_U + i'_V(\phi_U \omega, \phi_V \omega).$$

Puisque $(\phi_U \omega, \phi_V \omega) \in \Lambda^k(U) \oplus \Lambda^k(V)$, on a montré la surjectivité.
Clairement, Im $(j'_U \oplus -j'_V) \subset \ker(i'_U + i'_V)$. Pour montrer l'inverse, soit

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^k(U) \oplus \Lambda^k(V) \text{ t.q. } i'_U(\lambda_1) + i'_V(\lambda_2) = 0.$$

On a donc que $\lambda_1 = -\lambda_2$, donc supp$(\lambda_1) =$ supp$(\lambda_2) \subset U \cap V$. Ainsi (λ_1, λ_2) est l'image de λ_1 par $j'_U \oplus -j'_V$.

q.e.d

Démonstration de la suite de Mayer-Vietoris. Par le lemme précédent, on peut construire le diagramme commutatif dont les lignes sont exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "d"] & {} \arrow[d, "d"] & {} \arrow[d, "d"] & \\
0 \arrow[r] & \Lambda^{k-1}(U\cap V) \arrow[r, "j'_U\oplus -j'_V"] \arrow[d, "d"] & \Lambda^{k-1}(U)\oplus\Lambda^{k-1}(V) \arrow[r, "i'_U+i'_V"] \arrow[d, "d"] & \Lambda^{k-1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^{k}(U\cap V) \arrow[r, "j'_U\oplus -j'_V"] \arrow[d, "d"] & \Lambda^{k}(U)\oplus\Lambda^{k}(V) \arrow[r, "i'_U+i'_V"] \arrow[d, "d"] & \Lambda^{k}(M) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^{k+1}(U\cap V) \arrow[r, "j'_U\oplus -j'_V"] \arrow[d, "d"] & \Lambda^{k+1}(U)\oplus\Lambda^{k+1}(V) \arrow[r, "i'_U+i'_V"] \arrow[d, "d"] & \Lambda^{k+1}(M) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}.$$

Nous alons maintenant construire $\partial_k : H^k(M) \to H^{k+1}(U\cap V)$ de manière à rendre la suite exacte. Soit $x \in H^k(M)$ tel que $d(x) = 0$. Par exactitude de la suite, on peut trouver $y \in H^k(U) \oplus H^k(V)$ tel que $i'_U + i'_V(y) = x$. Ainsi

$$0 = d(x) = d(i'_U + i'_V(y)) = i'_U + i'_V(d(y)),$$

par commutativité du diagramme. Ainsi $d(y) \in \ker(i'_U + i'_V) = \mathrm{Im}\ (j'_U \oplus -j'_V)$. Par injectivité et exactitude de $j'_U \oplus -j'_V$, il existe un unique $z \in \Lambda^k(U\cap V)$ tel que $d(y) = j'_U \oplus -j'_V(z)$. De plus,

$$j'_U \oplus -j'_V(d(z)) = d(j'_U \oplus -j'_V(z)) = d^2(y) = 0$$

et puisque $j'_U \oplus -j'_V$ est injective, $d(z) = 0$. Ainsi $z \in H^k(U\cap V)$. On définie ainsi $\partial_k(x) = z$. Il nous faut maintenant montrer que la fonction est bien définie et ne dépend pas du choix de x et de y.
Soit donc $x' \in \Lambda^{k-1}(M)$. Montrons que $\partial_k(d(x')) = 0 \in H^{k+1}(U\cap V)$. Puisque $x' \in \Lambda^{k-1}(M)$, on peut trouver $y' \in H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V)$ tel que $i'_U + i'_V(y') = x'$. On choisi donc $d(y')$ pour y comme dans la construction. Ainsi $d(y) = d^2(y') = 0$ et donc $z = \partial_k(x) = 0$.
Si $i'_U + i'_V(y) = x = i'_U + i'_V(y')$, alors $y - y' = \ker(i'_U + i'_V) = \mathrm{Im}\ (j'_U \oplus -j'_V)$, donc il existe $w \in \Lambda^{k-1}(U\cap V)$ tel que $j'_U \oplus -j'_V(w) = y - y'$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
d(j'_U \oplus -j'_V(w)) &= d(y-y') \\
&= j'_U \oplus -j'_V(z) - j'_U \oplus -j'_V(z') \\
&= j'_U \oplus -j'_V(z - z') \\
&= j'_U \oplus -j'_V(w)
\end{aligned}$$

où z et z' sont désigné de manière unique par injectivité de $j'_U \oplus -j'_V$, donc la classe de 0 dans $H^{k-1}(M)$ est bien envoyée sur la classe de 0 dans $H^k(U\cap V)$,

indépentemment du choix de y.
L'exactitude de la suite ainsi définie consiste en six chasses similaires qui sont laissées au lecteur.

q.e.d

Corollaire 1.2.3
Si U_1 et U_2 sont des variétés disjointes, alors

$$I^\star : H^p(U_1 \cup U_2) \longrightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. En effet, par la séquence de Mayer-Vietoris on a pour tout p :

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cup U_2) \longrightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \longrightarrow 0.$$

Par définition d'une suite exacte, on a l'isomorphisme.

q.e.d

Exemple 1.2.4
$\mathbb{R}^2 - \{0\}$: Soient

$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x_1, x_2) | x_1 \leq 0,\, x_2 = 0\}$$
$$U_1 = \mathbb{R}^2 - \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0,\, x_2 = 0\}.$$

Par le lemme de Poincaré, on a que $H^p(U_1) = H^p(U_2) = 0$ pour $p > 0$ et $H^0(U_1) = H^0(U_2) = \mathbb{R}$. L'intersection des deux ensembles,

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^2 - \mathbb{R} = \mathbb{R}^2_+ \cup \mathbb{R}^2_-,$$

est une union disjointes de deux espaces de deux espaces différentiablement contractiles. Par le corollaire, on a

$$H^p(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{si } p = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, pour $p > 0$, la séquence de Mayer-Vietoris nous donne la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \longrightarrow 0.$$

Il nous reste donc à traiter le cas $p = 0, 1$. On a :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \arrow[r] & H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \arrow[dll, rounded corners] & \\
& H^0(U_1 \cap U_2) \arrow[r] & H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \arrow[r] & H^1(U_1) \oplus H^1(U_2).
\end{tikzcd}$$

Par les calculs précédents, c'est la même suite que

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \xrightarrow{\quad I^0 \quad} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{J^0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\quad \partial^\star \quad} H^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \longrightarrow 0.$$

De plus, puisque $\mathbb{R} - \{0\}$ est connexe, alors $H^0(\mathbb{R} - \{0\}) \simeq \mathbb{R}$, et puisque I^0 est injective, Im $(I^0) \simeq \mathbb{R}$. Ainsi on a

$$\mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{H}^0(U_1 \cap U_2)/\text{Im } J^0 \xrightarrow{\simeq} H^1(\mathbb{R} - \{0\}).$$

On peut donc faire le tableau récapitulatif suivant

$$H^p(\mathbb{R} - \{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \leq 2 \\ \mathbb{R} & \text{si } p = 1 \\ \mathbb{R} & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

$\mathbb{R}P^n$: Nous prendrons la définition du plan projectif suivante :

$$\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^n \coprod \mathbb{R}P^n.$$

On rappelle aussi la chomomologie de $\mathbb{R}^n$: $H^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Ainsi, Mayer-Vietoris nous dit qu'on a

$$0 \longrightarrow H^p\mathbb{R}P^n \longrightarrow H^p(\mathbb{R}^n) \oplus H^p(\mathbb{R}P^{n-1}) \longrightarrow 0.$$

Ainsi, $H^p(\mathbb{R}P^n) = H^p(\mathbb{R}^n) \oplus H^p(\mathbb{R}P^{n-1})$.

1.3 Eléments d'homotopie

Définition 1.3.1
Deux chaînes de fonctions $f, g : A^\star \to B^\star$ sont homotopes *s'il existe des fonctions linéaires $s : A^p \to B^{p-1}$ satisfants*

$$d_B s + s d_A = f - g.$$

On peut représenter cela sur un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "f-g"] & A^p \arrow[r] \arrow[d, "f-g"] \arrow[dl] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f-g"] \arrow[dl] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r] & B^p \arrow[r] & B^{p+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

.

Lemme 1.3.2
Pour deux chaînes de fonctions homotopes $f, g : A^\star \to B^\star$ on a

$$f^\star = g^\star : H^p(A^\star) \to H^p(B^\star).$$

Démonstration. Pour $[a] \in H^p(A^\star)$, on a

$$(f^\star - g^\star)[a] = [f^p(a) - g^p(a)] = [d_B^{p-1}s(a) + sd_A^p(a)] = 0.$$

q.e.d

Théorème 1.3.3
Soient f et $g : U \to V$ des fonctions lisses d'une variété dans une autre. Si $f \simeq g$, alors les fonctions induites

$$f^\star,\ g^\star : \Omega^\star(V) \to \Omega^\star(U)$$

sont aussi homotopes.

Démonstration. Soit une ω p-forme sur $U \times \mathbb{R}$, alors on peut l'écrire

$$\omega = f_I(x,t)dx_I + g_J(x,t)dt \wedge dx_J$$

où $I = (i_1, \ldots, i_p)$ et $J = (j_1, \ldots, j_{p-1})$.
Si $\phi_0 : U \to U \times \mathbb{R}$ la fonction inclusion, alors

$$\phi_0^\star(\omega) = f_I(x,0)d\phi_{0I} = f_I(x,0)dx_I.$$

De plus $\phi^\star(dt \wedge dx_I) = 0$. De la même manière, pour $\phi_1(x) = (x,1)$, on a

$$\phi_1^\star(\omega) = f_I(x,1)dx_I.$$

On construit ensuite $S_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$ de la manière suivante :

$$S_p(\omega) = \left(\int_0^1 g_J(x,t)dt\right) dx_J.$$

Il s'agit en fait d'un cas particulier du théorème 1.1.6, et on a donc

$$dS_p + S_{p+1}d = \phi_1^\star - \phi_0^\star.$$

Considérons maintenant la chaîne de fonctions

$$U \xrightarrow{\phi_\nu} U \times \mathbb{R} \xrightarrow{F} V$$

où F est l'homotopie lisse entre f et g. Alors on a $F \circ \phi_0 = f$ et $F \circ \phi_1 = g$.
On définit enfin

$$X_p : \Omega^p(V) \to \Omega^{p-1}(U)$$

par $X_p = S_p \circ F^\star$. Ainsi on a $dX_p + X_p d = g^\star - f^\star$.
En appliquant la première identité à $F^\star(\omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} dS_p(F^\star(\omega)) + S_{p+1}dF^\star(\omega) &= \phi_1^\star F^\star(\omega) - \phi_0^\star F^\star(\omega) \\ &= (F \circ \phi_1)^\star(\omega) - (F \circ \phi_0)^\star(\omega) \\ &= g^\star(\omega) - f^\star(\omega). \end{aligned}$$

q.e.d

Théorème 1.3.4
Pour $p \in \mathbb{Z}$ et des variétés U, V, W, on a

(*i*) *si $\phi_0, \phi_1 : U \to V$ sont homotopes, alors $\phi_0^\star, \phi_1^\star : H^p(V) \to H^p(U)$,*

(*ii*) *si $\phi : U \to V$ et $\psi : V \to W$ sont continues, alors $(\phi \circ \phi)^\star = \phi^\star \circ \psi^\star : H^p(W) \to H^p(U)$,*

(*iii*) *si la fonction continue $\phi : U \to V$ est une équivalence homotopique, alors $\phi^\star : H^p(V) \to H^p(U)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $f : U \to V$ une fonction lisse telle que $\phi_0 \simeq f$. Par transitivité, on a aussi $f \simeq \phi_1$ et donc $\phi_0^\star = f = \phi_1^\star$.
De la même manière, on approche ϕ et ψ par des fonctions homotopes lisses f et g respectivement. Ainsi

$$(\psi \circ \phi)^\star = (g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star = \phi^\star \circ \psi^\star.$$

En particulier, si $\psi \circ \phi \simeq \mathrm{id}_U$ et réciproquement, alors $\phi^\star$ est l'inverse de $\phi^\star$.
q.e.d

Corollaire 1.3.5
Si deux variétés U et V sont homotopes, alors leur cohomologie de De Rahm est isomorphe.

Ce corollaire n'est pas anodin, il nous dit que la cohomologie est un invariant homotopique.

1.4 Applications de la cohomologie de De Rahm

Théorème 1.4.1 (Point fixe de Brouwer)
Toute fonction continue $f : D^n \to D^n$ a au moins un point fixe.

Démonstration. Supposons que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in D^n$. On définit alors point par point $g : D^n \to S^{n-1}$ par

$$g(x) = x + tu$$

où $u = \frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$ et $t = -x\dot{u} + \sqrt{1 - \|x\|^2 + (x\dot{u})^2}$. Il s'agit en fait de l'intersection entre la droite qui passe par x et $f(x)$ et le cercle, du côté positif. Ainsi g est continue et $g|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.
Assertion : Il n'existe pas de fonction continue g de D^n dans S^{n-1} qui soit l'identité sur le bord.
Démonstration de l'assertion : Pour la fonction $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$, $r(x) = x/\|x\|$, on sait que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n-\{0\}} \simeq r$ car $\mathbb{R}^n - \{0\}$ contient tous les segments de la forme $[x, r(x))$. Ainsi $g(tr(x))$, $o \leq t \leq 1$ définit une homotopie entre r et une fonction constante. Ainsi $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est contractible. Par invariance homotopique, $H^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) = 0$ ce qui contredit les calculs précédents.
q.e.d

Lemme 1.4.2 (Urysohn-Tietze)
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un fermé et $f : A \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Alors il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ avec $g|_A = f$.

Démonstration. Pour la distance euclidienne d sur $\mathbb{R}^n$, on définit

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Pour $p \in \mathbb{R}^n - A$, on a le voisinage $U_p \subset \mathbb{R}^n - A$ de p donné par

$$U_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | d(x, p < \frac{1}{2} d(p, A)) \right\}.$$

Clairement ces ensembles recouvrent $\mathbb{R}^n - A$ et nous donnent une partition de l'unité ϕ_p. On définit alors

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \in A \\ \sum_{p \in \mathbb{R}^n - \{A\}} \phi_p(x) f(a(p)) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n - A \end{array} \right. ,$$

où $a(p) \in A$ est choisi tel que

$$d(p, a(p)) < 2d(p, A).$$

Puisque la somme est localement finie sur $\mathbb{R}^n - A$, g est lisse sur $\mathbb{R}^n - A$.
Il nous reste maintenant à montrer la continuité de g en un point x_0 du bord de A. Si $x \in U_p$, alors

$$d(x_0, p) \leq d(x_0, x) + d(x, p) < d(x_0, x) + \frac{1}{2}d(p, A) \leq d(x_0, x) + \frac{1}{2}d(p, x_0.)$$

Ainsi $d(x_0, p) < 2d(x_0, x)$ pour $x \in U_p$.
De plus, puisque $d(p, a(p)) < 2d(p, A) \leq 2d(x_0, p)$, on a pour $x \in U_p$,

$$d(x_0, a(p)) \leq d(x_0, p) + d(x_0, p) + d(p, s(p)) < 3d(x_0, p) < 6d(x_0, x).$$

Maintenant pour $x \in \mathbb{R}^n - A$, on a

$$g(x) - g(x_0) = \sum_{p \in \mathbb{R}^n - A} \phi_p(x)(f(a(p)) - f(x_0))$$

et

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq \sum_p \phi_p(x) \|f(a(p)) - f(x_0)\|,$$

où l'on somme sous les points p tels que $x \in U_p$.
Puisque f est continue, pour un ε donné on choisi un δ de telle sorte que si $d(x_0, y) < 6\delta$, alors $\|f(y) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Ainsi

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq \sum_p \phi_p(x) \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

On a donc ainsi montré la continuité de g en x_0.

q.e.d

Proposition 1.4.3
Pour un fermé A de $\mathbb{R}^{n+1}$, $A \neq \mathbb{R}^n$, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{rcl} H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A) & \simeq & H^p(\mathbb{R}^n - A) \text{ pour } n \geq 1 \\ H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) & \simeq & H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1 \\ H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) & \simeq & \mathbb{R}. \end{array}$$

Démonstration. On définit deux ouverts de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} U_1 & = & \{\mathbb{R}^n \times (0, \infty)\} \cup \{(\mathbb{R}^n - A) \times (-1, \infty)\} \\ U_2 & = & \{\mathbb{R}^n \times (-\infty, 0)\} \cup \{(\mathbb{R}^n - A) \times (-\infty, 1)\}. \end{array}$$

Ainsi $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} - A$ et $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n - A) \times (-1, 1)$. Soit $\phi : U_1 \to U_1 : (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n+1} + 1)$. Remarquons maintenant que pour tout $x \in U_1$, les segments de x à $\phi(x)$ et de $\phi(x)$ à un point fixé de $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ sont contenus dans U_1, et ainsi U_1 est contractible. Le même raisonnement est valable pour U_2.
Soit pr la projection de $U_1 \cap U_2$ sur $\mathbb{R}^n - A$ et $i : \mathbb{R}^n - A \to U_1 \cap U_2 : i(y) = (y, 0)$. Ainsi $\mathrm{pr} \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n - A}$ et $i \circ \mathrm{pr} \simeq \mathrm{id}_{U_1 \cap U_2}$. Par le théorème 1.3.4, on peut en conclure que

$$\mathrm{pr}^\star : H^p(\mathbb{R}^n - A) \to H^p(U_1 \cap U_2)$$

est un isomorphisme. LA séquence de Mayer-Vietoris nous induit un isomorphisme

$$\partial^\star : H^p(U_1 \cap U_2) \to H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A).$$

On considère maintenant la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \xrightarrow{I^\star} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \longrightarrow H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^\star} H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \longrightarrow 0$$

Un élément de $H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)$ est donné par une paire de fonctions constantes sur U_1 et U_2, de valeur respectivement a_1 et a_2. Par construction, l'image par $J^\star$ est donnée par la fonction constante sur $U_1 \cap U_2$ de valeur $a_2 - a_1$. Ainsi

$$\ker \partial^\star = \mathrm{Im}\ J^\star = \mathbb{R}\dot{1},$$

et on obtient les isomorphismes

$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \simeq H^0(U_1 \cap U_2)/\mathbb{R}\dot{1} \simeq H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R} \cdot 1.$$

On a aussi $\dim(\mathrm{Im}\ (I^\star)) = \dim(\ker(J^\star)) = 1$ et donc $H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \simeq \mathbb{R}$.

q.e.d

CHAPITRE 2

Complexes simpliciaux

2.1 Géométrie des complexes simpliciaux

Dans ce chapitre, nous introduirons la notion de complexe simplicial, notion fondamentale pour la démonstration du théorème de De Rham. Nous avons principalement utilisé le livre de I.M. Singer [4].

Définition 2.1.1
Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et un sous-ensemble $C \subset V$ est dit convexe *si*

$$\{c_1, c_2\} \subset C \Rightarrow tc_1 + (1-t)c_2 \in C \, t \in I$$

Définition 2.1.2
Un ensemble de vecteur $\{v_0, \ldots, v_k\}$ dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est convexe-indépendant *ou* c-indépendant *si l'ensemble $\{v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}$ est linéairement indépendant.*
On peut remarquer que cette définition est indépendante du choix de v_0.

Théorème 2.1.3
Soit C le plus petit ensemble convexe généré par un ensemble de vecteur c-indépendants $\{v_0, \ldots, v_k\}$. Alors C est composé de tous les vecteurs pouvant s'écrire sous la forme $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ avec $a_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$. De plus, tout vecteur de C s'écrit ainsi de manière unique.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que l'intersection d'ensemble convexes est elle-même convexe ; en effet si x et y sont élément de l'intersection de deux

ensembles convexes, alors $tx + (1-t)y$ doit être élément de chacun des ensembles pour $t \in I$, donc aussi de l'intersection.
Ainsi, C est contenu dans l'intersection de tous les ensembles convexes contenant $\{v_0, \ldots, v_k\}$.
Maintenant, soit

$$C_1 = \left[v \in V \mid v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i,\ a_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^{k} a_i = 1 \right].$$

On affirme que C_1 est convexe ; en effet, si $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ et $w = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i$ des éléments de C_1, alors

$$tv + (1-t)w = \sum_{i=0}^{k} [ta_i + (1-t)b_i] v_i$$

et de plus

$$\sum_{i=0}^{k} [ta_i + (1-t)b_i] = t \sum_{i=0}^{k} a_i + (1-t) \sum_{i=0}^{k} b_i = t + 1 - t = 1.$$

Ainsi C_1 est un ensemble convexe contenant $\{v_o, \ldots, v_k\}$, donc $C_1 \supset C$.
Réciproquement, montrons que $C_1 \subset C$. Soit $v \in C_1$ avec $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$, on procédera par induction sur le nombre de coefficients non-nuls de v.
Si $n = 1$, alors $v = v_j$ pour un certain $0 \leq j \leq k+1$ et donc $v \in C$
Supposons maintenant que si v s'écrit avec $n < k+1$ coefficients non-nuls, alors $v \in C$. Soit maintenant $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ ayant $n+1$ coefficients non-nuls, qu'on peut supposer être sans perte de généralité $a_0, \ldots, a_n$, avec $n \neq 1$, sinon par minimalité de C tous les autres coefficients seraient nuls. Ainsi

$$\sum_{i=0}^{n} a_i v_i = (1-a_n) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} v_i + a_n v_n.$$

Or

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{1-a_n} = \frac{1}{1-a_n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{1}{1-a_n}(1-a_n) = 1,$$

Donc par l'hypothèse de récurrence, $\sum_{1=0}^{n-1} a_i v_i \in C$. Ainsi, puisque C est convexe, on a pout $t \in I$

$$t \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1-a_n} v_i + (1-t) v_n \in C.$$

Il suffit de prendre $t = (1 - a_n)$ pour avoir le résultat voulu. Ainsi $C_1 \subset C$ et donc $C_1 = C$.
Montrons maintenant l'unicité. Soit

$$v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i = \sum_{i=0}^{k} b_i v_i,$$

avec $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1 = \sum_{i=0}^{k} b_i$. Montrons que $a_i = b_i$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) v_i \\ &= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i) v_i - \left(\sum_{i=0}^{k} a_i - \sum_{i=0}^{k} b_i \right) v_0 \\ &= \sum_{i=0}^{k} (a_i - b_i)(v_i - v_0). \end{aligned}$$

Or $\{v_1 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}$ est linéairement indépendant, donc $a_i - b_i = 0$ pour tout $i > 0$. Alors clairement $a_0 = b_0$ et on a donc démontré l'unicité.

q.e.d

Définition 2.1.4
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Le plus petit ensemble convexe généré par un ensemble de vecteurs c-indépendants $\{v_0, \ldots, v_k\}$ est appelé k-simplexe (fermé), *noté $[v_0, \ldots, v_k]$.*
Pour $v \in [v_0, \ldots, v_k]$, alors les coefficients a_i tels que $a_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$ et $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ sont appelés coordonnées barycentriques de *v.*

Définition 2.1.5
Soit $\{v_0, \ldots, v_k\}$ un ensemble c-indépendant. L'ensemble

$$\{v \in [v_0, \ldots, v_k] \mid a_i(v) > 0,\ i = 0, \ldots, k\},$$

où $a_i(v)$ donne la ième coordonnée de v dans le système $v = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i$, $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$, est appelé simplexe ouvert, *noté $(v_0, \ldots, v_k)$.*
Soit $[s] = [v_0, \ldots, v_k]$ un simplexe fermé. Les vertexe *de $[s]$ sont les points $v_0, \ldots, v_k$. Les* faces fermées *de $[s]$ sont les simplexe fermés $[v_{j_0}, \ldots, v_{j_n}]$ où $\{j_0, \ldots, j_n\} \subset \{0, \ldots, k\}$, $j_i = j_l$ pour $i \neq l$ et $0 < n \leq k$. Les* faces ouvertes *du simplexe $[s]$ sont les simplexe $(v_{j_0}, \ldots, v_{j_n})$.*

Définition 2.1.6
On appelle complexe simplicial *K un ensemble fini le simplexe ouverts dans $\mathbb{R}^n$ tel que :*

(*i*) *si* $(s) \in K$*, alors toutes les faces ouvertes de* $[s]$ *sont dans* K *;*

(*ii*) *si* $\{(s_1), (s_2)\} \subset K$*, alors soit* $(s_1) \cap (s_2) = \emptyset$*, soit* $(s_1) = (s_2)$*.*

La dimension *de* K *est le maximum des dimensions des simplexe de* K*.*

Remarque 2.1.7
Si K est un complexe simplicial, alors on note $[K]$ l'ensemble des points des simplexe ouverts de K.
On peut remarquer alors que $[K]$ est compact et que $[K] = \bigcup_{(s)\in K}(s) = \bigcup_{(s)\in K}[K]$.

Définition 2.1.8
Un sous-complexe *d'un complexe simplicial* K *est un complexe simplicial* L *tel que* $(s) \in L \Rightarrow (s) \in K$*.*

Définition 2.1.9
Soit K *un complexe. Soit* r *un entier plus petit ou égal à la dimension de* K*. Le* r*-squelette* K^r *de* K *est la collection* $K^r = (s) \in K; \dim(s) \leq r$*.*

2.2 Subdivisions barycentriques

Définition 2.2.1
Soient $v \in \mathbb{R}^n$ *et* $A \subset \mathbb{R}^n$*. La paire* (v, A) *est dans une* position générale *si* $v \notin A$ *et que pour tout* $\{a_1, a_2\} \subset A$ *tels que* $a_1 \neq a_2$*, alors* $[v, a_1] \cap [v, a_2] = \{v\}$*.*

Définition 2.2.2
Soit le couple (v, A) *dans une position générale. Le* cône de vertexe v et de base A*, noté* $v * A$ *est l'ensemble*

$$v * A = \bigcup_{a \in A} [v, a].$$

Théorème 2.2.3
Soient $[s] = [v_0, \ldots, v_k]$ *un* k*-simplexe et* $v \in (s)$*. Alors* $(v, [s^{k-1}])$ *est dans une position générale, et* $v * [s^{k-1}] = [s]$

Démonstration. Soit $\{a_1, a_2\} \subset [s^{k-1}]$. Supposons qu'il existe $w \in [v, a_1] \cap [v, a_2]$ avec $w \neq v$. Montrons qu'alors $a_1 = a_2$.
On sait qu'on peut écrire v, a_1 et a_2 en coordonnée barycentrique dans $[s]$:

$$a_1 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i, \quad a_2 = \sum_{i=0}^{k} \beta_i v_i, \quad v = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i v_i.$$

Or $a_1 \notin (s)$ et $a_2 \notin (s)$, donc $\alpha_j = 0 = \beta_l$ pour un j et un l plus petit ou égale à k. Comme de plus $v \in (s)$, alors $\gamma_i \neq 0$ pour tout i. Si $w \in [v, a_1]$, alors $w = t_1 v + (1-t_1)a_1$ pour un certain $t_2 \in I$. Et donc $w = \sum_{i=0}^{k} [t_1\gamma_i + (1-t_1)\alpha_i]v_i$. De la même manière, si $w \in [v, a_1]$, alors $w = \sum_{i=0}^{k} (t_2\gamma_i + (1-t_2)\beta_i)v_i$ pour un certain $t_2 \in I$. Par unicité des coordonnées barycentriques,

$$t_1\gamma_i + (1-t_1)\alpha_i = t_2\gamma_i + (1-t_2)\beta_i \, (i = 0, 1, \ldots, k).$$

Ainsi $t_2 - t_1 = (1/\gamma_i)[(1-t_2)\beta_i - (1-t_1)\alpha_i]$.
En remplaçant i par j, on a

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\gamma_j}(1-t_2)\alpha_j \geq 0$$

En remplaçant i par l, on a

$$t_1 - t_2 = -\frac{1}{\gamma_l}(1-t_1)\alpha_l \leq 0$$

Ainsi on a donc que $t_1 - t_2 = 0$, et que

$$(1-t_1)\alpha_i = (1-t_1)\beta_i$$

pour tout $i \leq k$. Maintenant puisque $w \neq v$, alors $t_1 \neq 1$, ce qui implique que $\alpha_i = \beta_i$, et donc que $a_1 = a_2$, ce qui complète la preuve que $(v, [s^{k-1}])$ est dans une position générale.
Par convexité de $[s]$, on peut immédiatement déduire que $v * [s^{k-1}] \subset [s]$. Pour montrer que $v * [s^{k-1}] \supset [s]$, on montre que pour tout $w \in [s]$, $w \in v * [s^{k-1}]$. On peut supposer que $w \in (s)$; en effet, si $w \notin (s)$, alors $w \in [s^{k-1}]$ et donc $w \in v * [s^{k-1}]$. Pour la même raison, on peut supposer $w \neq v$. En coordonnées barycentrique,

$$w = \textstyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i \quad v = \sum_{i=0}^{k} \beta_i v_i \quad (\alpha_i, \beta_i > 0).$$

Remarquons que

$$\sum_{i=0}^{k} (\alpha_i - \beta_i) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i = 1 - 1 = 0,$$

et puisque $\alpha_i - \beta_i \neq 0$ pour un certain i, alors il existe un j tel que $\alpha_j - \beta_j < 0$. Pour ce j, on construit la fonction $f_j(t) = \beta_j + t(\alpha_j - \beta_j)$. On a donc $f_j(1) > 0$ et $f_j(t) < 0$ pout t assez grand. On a donc un $t_j > 1$ tel que

$\beta_j + t_j(\alpha_j - \beta_j) = 0$. De plus, remarquons que pour tout i, $\beta_i + t_j(\alpha_i - \beta_i) \geq 0$. Ainsi, $v + t_j(w - v) = x \in [s^{k-1}]$. Donc

$$w = \frac{1}{t_j}x + \frac{t_j - 1}{t_j}v = t^1 x + (1 - t^1)v$$

avec $t^1 = 1/t_j < 1$. Finalement on a donc $w \in v * [s^{k-1}]$.

q.e.d

Définition 2.2.4
Soit s un k-simplexe. Le barycentre *de s, noté $b(s)$ est le point de coordonnées barycentriques* $(1/(k+1), \ldots, 1/(k+1))$.
Soit K un complexe simplicial. Une subdivision $K^\dagger$ *de K est un complexe simplicial tel que :*

(i) $[K^\dagger] = [K]$,

(ii) Si $s \in K^\dagger$, alors il existe un simplexe ouvert (s') de K tel que $(s) \subset (s')$.

Théorème 2.2.5
Soit s un k-simplexe. Soit $K^\dagger$ une subdivision de s^{k-1}, soit encore $v \in (s)$. Alors $(v, [K^\dagger])$ est dans une position générale.
De plus, $v * [K^\dagger]$ est égale à $K' = K^\dagger \cup (\bigcup_{s^\dagger \in K^\dagger} (s^\dagger, v)) \cup (v)$, avec pour $(s^\dagger) = (v_0, \ldots, v_r) \in K^\dagger$, $(s^\dagger, v) = (v_0, \ldots, v_r, v)$. Le complexe K' est une subdivision de s.

Démonstration. Par le théorème 2.2.3, on sait que $(v, [s^{k-1}])$ est dans une position générale, et que $v * [s^{k-1}] = [s]$, or $[K^\dagger] = [s^{k-1}]$ et donc $(v, [K^\dagger])$ est dans une position générale, et $v * [K^\dagger] = [s]$.
Cependant, il nous reste à montrer que K' . On sait déjà qu'il est un ensemble de simplexe ouverts ; traitons donc cas pas cas la première condition dans la définition de complexe sur un simplexe de K' :
Supposons que le simplexe soit dans $K^\dagger$ (respectivement (v)), alors toutes ses faces ouvertes sont dans $K^\dagger$ (respectivement (v)) par définition, et à fortiori dans K'. Supposons maintenant que le simplexe soit de la forme $(s^\dagger, v)$, alors ses faces ouvertes sont de la forme $s^\dagger$, (v) ou $[(s_1^\dagger, v)$ où $s_1^\dagger$ est une face ouverte de $s^\dagger]$. La forme un et deux est immédiate, quant à la troisième forme, remarquons juste que si $s_1^\dagger$ est une face ouverte de $s^\dagger$, alors elle appartient aussi à $K^\dagger$ et donc cette troisième forme est bien dans K'.
La seconde condition mérite aussi de distinguer les cas. Il s'agit maintenant de montrer que l'intersection de simplexes distincts ouverts de K' est vide. C'est évident que si l'on prend des simplexes dans le même complexe, i.e $[K^\dagger]$ ou (v), alors par définition leur intersection est vide. De plus on sait que $(s_1^\dagger, v) \subset (s)$ puisque $v \in (s)$ et donc $(s^\dagger) \cap (s_1^\dagger, v) = \emptyset$. Supposons

maintenant que $w \in (s_1^\dagger, v) \cap (s_1^\dagger, v)$. Puisque ces simplexe sont ouverts, $w \neq v$. Par le théorème 2.2.3, alors il existe un unique $x \in [s^{k-1}] = [K^\dagger]$ tel que $w \in [v, x]$. De plus, $[s_1^\dagger, v] = v * [s_1^\dagger]$, et donc $x \in (s_1^\dagger)$. De la même manière, $x \in (s_2^\dagger)$ et donc par définition $s_1^\dagger = s_2^\dagger$ puisque $K^\dagger$ est un complexe, et donc $(s_1^{\dagger, v}) = (s_2^\dagger, v)$. Ainsi K' est un complexe.
Montrons maintenant que K' est une subdivision de s :

$$[K'] = \bigcup_{s' \in K'} [s'] = \bigcup_{s^\dagger \in K^\dagger} v * [s^\dagger] = v * [K^\dagger] = [s].$$

Remarquons de plus que chaque simplexe ouvert de K' est contenu dans un simplexe ouvert de s ; s'il est contenu dans $K^\dagger$, il l'est aussi dans un simplexe ouvert de s par définition de la subdivision, et sinon il est contenu dans (s). Ainsi K' est une subdivision de s.

q.e.d

Définition 2.2.6
Soit K un complexe simplicial. On définit un ordre partiel *sur K par : $s_1 \leq s_2 \Leftrightarrow s_1$ est une face de s_2, et on entend $s_1 < s_2$ par $s_1 \leq s_2$ et $s_1 \neq s_2$.*

Théorème 2.2.7
Soit K un complexe simplicial et

$$K^{(1)} = \{b(s_0), b(s_1), \ldots, b(s_k);\ s_0 < \cdots < s_k,\ \{s_0, \ldots, s_k\} \subset K\}.$$

Alors $K^{(1)}$ est une subdivision de K. De plus, pour chaque $\{s_0, \ldots, s_r\} \subset K$ tels que $s_0 < \cdots < s_r$, on a $(b(s_0), \ldots, b(s_r)) \subset (s_r)$.

Remarque 2.2.8
La subdivision $K^{(1)}$ est appelée *première subdivision barycentrique*. En itérant le procédé, $K^{(n)} = \underbrace{(((K^{(1)})^{(1)})\ldots)^{(1)}}_{n \text{ fois}}$ est la *nième subdivision barycentrique* de K.

Démonstration. Montrons cela par induction sur la dimension de K :
Si $\dim K = 0$, alors $b(s_0) = s_0$, donc $K^{(1)} = K$ et il n'y a rien à montrer.
Supposons maintenant le théorème vrai pour les complexe simpliciaux de dimension $\leq n-1$. Soit K un complexe simplicial de dimension n. Alors le $(n-1)$-squelette K^{n-1} est un complexe de dimension $\leq n-1$, et donc en appliquant l'hypothèse de réccurence, si

$$\{s_0, \ldots, s_r\} \subset K, \text{tels que } s_0 < \cdots < s_r \text{ et } \dim s_r \leq n-1,$$

alors $\{b(s_0), \ldots, b(s_r)\}$ est c-indépendant et donne un simplexe ouvert $(b(s_0), \ldots, b(s_r))$ dans $(K^{n-1})^{(1)}$, et de plus

$$(b(s_0), \ldots, b(s_r)) \subset (s_r).$$

Maintenant, soient $\{s_0, \ldots, s_r\} \subset K$ tels que $s_0 < \cdots < s_r$ et $\dim s_r = n$. Ainsi, $\dim s_{r-1} < \dim s_r$ et par conséquence $\dim s_{r-1} \leq n-1$ et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. De plus, puisque $b(s_r) \in (s_r)$, par le théorème 2.2.3, $(b(s_r), (b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})))$ est dans une position générale. Alors $(b(s_0), \ldots, b(s_{r-1}), b(s_r))$ est un simplexe ouvert, l'intérieur du simplexe fermé étant inclu dans l'intérieur de s_r :

$$[b(s_0), \ldots, b(s_{r-1}), b(s_r)] = b(s_r) * [b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})] \subset [s_r].$$

On peut donc en déduire que $(b(s_0), \ldots, b(s_{r-1}), b(s_r)) \subset (s_r)$.
On sait déjà que $K^{(1)}$ est un ensemble de simplexe ouverts, mais c'est en fait un complexe simplicial : la première condition est clairement satisfaite. En effet chaque face de $(b(s_0), \ldots, b(s_r))$ est de la forme $(b(s_{j_0}), \ldots, b(s_{j_r}))$ à fortiori dans $K^{(1)}$.
Il nous faut donc discuter de la seconde condition.Supposons $s_0 < \cdots < s_r$ et $p_0 < \cdots < p_q$ tels que

$$w \in (b(s_0), \ldots, b(s_r)) \cap (b(p_0), \ldots, b(p_q)).$$

Par inclusion, on peut en déduire que $w \in (s_r) \cap (p_q)$. Puisque K est un complexe, $s_r = p_q$ et $b(s_r) = b(p_q)$. De plus

$$(b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})) \subset (s_r) \text{ et } (b(p_0), \ldots, b(p_{q-1})) \subset (p_q)$$

où (s_{r-1}) et (p_{q-1}) sont des faces de (s_r). Remarquons de plus que $(b(s_0), \ldots, b(s_{r-1}))$ et $(b(p_0), \ldots, b(p_{q-1})) \in (s_r^{(1)})$, et donc

$$\begin{aligned} w &\in (b(s_0), \ldots, b(s_{r-1}), b(s_r)) \cap (b(p_0), \ldots, b(p_{q-1}), b(p_q)) \\ &\subset b(s_r) * (b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})) \cap b(p_q) * (b(p_0), \ldots, b(p_{q-1})). \end{aligned}$$

Par le théorème 2.2.5 et l'hypothèse de récurrence, on déduit que

$$(b(s_0), \ldots, b(s_{r-1})) = (b(p_0), \ldots, b(p_{q-1})),$$

donc $K^{(1)}$ est un complexe simplicial.
Pour achever le pas de récurrence, il nous faut voir que $[K^{(1)}] = [K]$. On remarque facilement que $[K^{(1)}] \subset [K]$. De plus, par l'hypothèse de récurrence $[K^{(1)}] \supset [(K^{n-1})^{(1)}] = [K^{n-1}]$. Il nous reste donc à montrer que

$$[K^{(1)}] \supset [K] - [K^{n-1}].$$

Soit donc $w \in [K] - [K^{n-1}]$. Donc w doit être élément d'un simplexe ouvert (s) de dimension n. On peut donc écrire

$$w \in (s) = [s] = b(s) * [s^{n-1}].$$

Mais $[s_{n-1}] \subset [K^{n-1}] = [(K^{n-1})^{(1)}]$, et donc $w \in b(s) * (s_1)$ pour $(s_1) = (b(s_0), \ldots, b(s_k)) \in (K^{n-1})^{(1)}$.
Si $w = b(s)$, alors w est un vertexe dans $K^{(1)}$, et si $w \neq b(s)$, alors $w \in (b(s_0), \ldots, b(s_k), b(s)) \subset [K^{(1)}]$. Cela achève la preuve.

q.e.d

Définition 2.2.9
Soit (S, ρ) un espace métrique, et $T \subset S$ un sous-ensemble compact. On définit le diamètre de T *par*

$$\text{diam } T = \sup_{\{t_1,t_2\} \subset T} \rho(t_1, t_2).$$

Si de plus ρ est continue, le suprémum est atteint et l'on peut écrire

$$\text{diam } T = \max_{\{t_1,t_2\} \subset T} \rho(t_1, t_2).$$

Soit K un complexe simplicial dans $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique usuelle. La maille *de K est le maximum des simplexe de K :*

$$\text{maille}\, K = \max_{s \in K} \text{diam } [s].$$

Lemme 2.2.10
Soit s un simplexe de $\mathbb{R}^n$, alors diam $[s] = \rho(v_1, v_2)$ *pour une paire (v_1, v_2) de vertexe de s.*
Si K est un complexe simplicial, alors maille $K = \rho(v_1, v_2)$ *où v_1 et v_2 sont des vertexe d'un simplexe de K.*

Démonstration. Soit s un simplexe et $\{v_1, v_2\} \subset [s]$ tels que diam $[s] = \rho(v_1, v_2)$. Sans perte de généralité, supposons alors que v_2 n'est pas un vertexe. Alors v_2 est contenu dans un simplexe ouvert de dimension ≥ 1. En particulier il existe $\{w_1, w_2\} \subset [s]$ avec $w_1 \neq w_2$ tel que $v_2 = tw_1 + (1-t)w_2$ pour $0 < t < 1$.
On définit la fonction $f(t) = \rho(v_1, tw_1 + (1-t)w_2)$ qui est convexe sur I. Elle n'a donc pas de maximum sur $0 < t < 1$, ce qui contredit la maximalité de $\rho(v_1, v_2)$.
La seconde partie de la preuve découle immédiatement de la définition de la maille de K.

q.e.d

Théorème 2.2.11
Soit K un complexe simplicial de dimension m. Alors

$$\operatorname{maille} K^{(1)} \leq (m/(m+1)) \operatorname{maille} K.$$

En particulier, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{maille} K = 0$.

Démonstration. Par le lemme, on peut trouver un simplexe $(b(s_0), \ldots, b(s_r)) \in K^{(1)}$ tel que $\operatorname{maille} K^{(1)} = \rho(b(s_k), b(s_h))$ avec $s_k < s_h$. En renumérottant les vertexes si nécessaire, $s_k = (v_0, \ldots, v_p)$ et $s_h = (v_0, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_q)$ et

$$\begin{aligned}
\operatorname{maille} K^{(1)} &= \|b(s_k) - b(s_h)\| \\
&= \left\| \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i - \frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^{q} v_j \right\| \\
&= \frac{1}{q+1} \left\| \frac{q+1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i - \sum_{j=0}^{q} v_j \right\| \\
&= \frac{1}{q+1} \left\| \sum_{i=0}^{q} \left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} v_i - v_j \right) \right\| \\
&= \frac{1}{p+1} \frac{1}{q+1} \left\| \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{p} (v_i - v_j) \right\| \\
&\leq \frac{1}{p+1} \frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{p} \|v_i - v_j\| .
\end{aligned}$$

Or, on sait que $\|v_i - v_j\| \leq \operatorname{diam} [s_k] \leq \operatorname{maille} K$. De plus, le ijème terme est nul dans la somme et il y en a $p+1$. Le nombre de termes non-nuls est donc

$$(p+1)(q+1) - (p+1) = (p+1)q.$$

De plus, chaque norme est inférieur à $\operatorname{maille} K$ et puisque $q \leq m$,

$$\operatorname{maille} K^{(1)} \leq \frac{q}{q+1} \operatorname{maille} K \leq \frac{m}{m+1} \operatorname{maille} K.$$

q.e.d

2.3 Théorème d'approximation simpliciale

Définition 2.3.1
Soient K et L des complexe simpliciaux. Une fonction $\phi : [K] \to [L]$ est une fonction simpliciale *si :*

(*i*) *pour tout vertexe* $v \in K$, $\phi(v)$ *est un vertexe de* L,

(*ii*) *pour tout simplexe* $(v_0, \ldots, v_k) \in K$, *les vertexe* $\phi(v_0), \ldots, \phi(v_k)$ *sont éléments d'un même simplexe de* L,

(*iii*) *pour chaque* $(s) = (v_0, \ldots, v_k) \in K$ *et* $p = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in (s)$, *l'image de* p *est donnée par*

$$\phi(p) = \sum_{i=0}^{k} a_i \phi(v_i).$$

Définition 2.3.2
Soient K *un complexe simplicial et* v *un vertexe de* K. *L'*étoilé *de* v *est l'ensemble de points*

$$\boldsymbol{St}(v) = \bigcup_{\substack{(s) \in K \\ v \in [s]}} (s).$$

Théorème 2.3.3
Soit K *un complexe simplicial. Pour tout vertexe* v *de* K, $\boldsymbol{St}(v)$ *est un ensemble ouvert dans* $[K]$ *contenant* v. *De plus* v *est le seul vertexe de* K *contenu dans* $\boldsymbol{St}(v)$.
La collection $\{\boldsymbol{St}(v)\}_{v \in K^0}$ *est un recouvrement ouvert de* $[K]$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que le complémentaire de $\mathbf{St}(v)$ dans $[K]$ est fermé :

$$\mathbf{St}(v)^c = \bigcup_{v \notin [s]} (s).$$

Puisque $v \notin [s]$, alors aucune face de (s) ne contient v. Nous avons donc que si $(s) \subseteq \mathbf{St}(v)^c$, alors $[v] \subseteq \mathbf{St}(v)^c$.
De plus, $[s]$ est compact et donc $[s]$ est fermé. On peut donc écrire $\mathbf{St}(v)^c = \cup_{v \notin [s]} [s]$ qui est donc fermé.
Remarquons ensuite que seuls les simplexe ouverts de dimension 0 peuvent contenir un vertexe, et puisque (v) est le seul simplexe de dimension 0 contenant v, celui-ci est le seul vertexe dans $\mathbf{St}(v)$.
Enfin, $\cup_{v \in K^0} \mathbf{St}(v) = [K]$. En effet, si $p \in [K]$, alors $p \in (s)$ pout un certain $(s) \in K$, et donc $p \in \mathbf{St}(v)$ pour un certain vertexe v de (s).

q.e.d

Définition 2.3.4
Soient K *et* L *des complexe simpliciaux et* $f : [K] \to [L]$ *une fonction continue. Une fonction simpliciale* $\phi : K \to L$ *est une* approximation simpliciale *de* f *si* $f(\boldsymbol{St}(v)) \subset \boldsymbol{St}(\phi(v))$ *pour tout vertexe* v *de* K.

Théorème 2.3.5
Soit $\phi : K \to L$ une approximation simpliciale de f. Alors pour tout $p \in [K]$, $f(p)$ et $\phi(p)$ appartiennent à un même simplexe fermé de L.

Démonstration. Soit $p \in [K]$, alors $p \in (s)$ pour $(s) = (v_0, \ldots, v_r)$ un simplexe de K, et $f(p) \in f((s)) \subset f(\mathbf{St}(v_j)) \subset \mathbf{St}(\phi(v_j))$ pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$.
De plus, $f(p) \in (t)$ pour un simplexe $(t) \in L$. Ainsi $(t) \cap \mathbf{St}(\phi(v_j)) \neq \emptyset$ pour tout j, mais puisque L est un simplexe et $\mathbf{St}(\phi(v_j))$ est une union de simplexe ouverts, alors $(t) \in \mathbf{St}(\phi(v_j))$ pour tout j. Donc d'après cela $\phi(v_j)$ est un vertexe de (t) pour tout j. On peut donc exprimer p dans les coordonnées barycentriques de s :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{j=0}^{r} a_j v_j \\ \phi(p) &= \sum_{j=0}^{r} a_j \phi(v_j) \in [t]. \end{aligned}$$

Ceci complète donc la preuve.

q.e.d

Corollaire 2.3.6
Soit $\phi : K \to L$ une approximation simpliciale de f, alors

$$d(f, \phi) \leq \text{maille}\, L,$$

où $d(f, \phi) = \sup_{p \in [K]} \rho(f(p), \phi(p))$.

Lemme 2.3.7
Si $f : K \to L$ est une fonction simpliciale et que ϕ est une approximation simpliciale de f, alors $f = \phi$.

Démonstration. Pour tout vertexe $v \in K$,

$$f(v) \in f(\mathbf{St}(v)) \subset \mathbf{St}(\phi(v)).$$

Or, puisque f est une fonction simpliciale, $f(v)$ est un vertexe et par le théorème 2.3.3 $f(v) = \phi(v)$. Puisque v est un vertexe quelconque, f et ϕ sont les mêmes sur tous les vertexe, et puisque les deux sont des fonctions simpliciales cela se généralise à tout l'ensemble.

q.e.d

Théorème 2.3.8
Soit $\phi : K \to L$ une approximation simpliciale de f et K_1 un sous-complexe de K. Si la restriction de f à K_1 est une fonction simpliciale, alors il existe un homotopie entre f et ϕ constante sur $[K_1]$.

Démonstration. On définit

$$\begin{array}{rcl} F : [K] \times I & \longrightarrow & [L] \\ (p,t) & \longmapsto & F(p,t) = t\phi(p) + (1-t)f(p). \end{array}$$

F est bien définie sur L, car par le théorème 2.3.5, $f(p)$ et $\phi(p)$ sont dans le même simplexe qui est par définition convexe. On vérifie facilement que l'homotopie ainsi définie est continue (comme combinaison linéaire de fonctions continues) et que c'est bien une homotopie entre f et ϕ.
Le faite que la restriction de F à $[K_1]$ est constante est une application directe du lemme refapp :lemme1 : $\phi|_{[K_1]}$ est une approximation de $f|_{[K_1]}$ et donc pour $p \in [K_1]$, $f(p) = \phi(p)$.

q.e.d

Théorème 2.3.9
Soient $f : [K] \to [L]$ une fonction continue et $\phi : K^0 \longrightarrow L^0$ une fonction de vertexe. Alors ϕ peut être étendue à une approximation simpliciale de f si et seulement si $f(\boldsymbol{St}(v)) \subset \boldsymbol{St}(\phi(v))$ pour tout $v \in K^0$.

Démonstration. Le côté nécessaire de la preuve découle de la définition de fonction simpliciale. Pour le côté nécessaire de la preuve, il nous suffit de vérifier que ϕ peut être étendue à une fonction simpliciale de K dans L (le reste de la définition de fonction simpliciale étant donné en hypothèse). Les conditions (i) et (iii) de la définition découlent d'une extension linéaire de ϕ. Il nous reste donc plus qu'à monter que si $(s) = (v_1, \dots, v_r)$ est un simplexe de K, alors $\phi(v_0), \dots, \phi(v_r)$ sont les vertexe d'un même simplexe de L. Mais on remarque que $f((s)) \subset f(\mathbf{St}(v_j)) \subset \mathbf{St}(\phi(v_j))$ pour tout j compris entre 0 et r. Ainsi $\cap_{j=0}^{r} \mathbf{St}(\phi(v_j)) \neq \emptyset$. Il y a donc un simplexe (t) contenu dans l'intersection des étoilés des v_j, ainsi $\phi(v_j)$ doit être un vertexe de (t) pour tout $0 \leq j \leq r$.

q.e.d

Théorème 2.3.10
Soient $f : [K] \to [L]$ une application continue et K_n une suite de subdivision de K tel que $lim_{n\to\infty}\text{maille}\, K_n = 0$. Alors pour n assez grand il existe une fonction simpliciale $\phi : K_n \to L$ telle qu'elle soit une approximation simpliciale de f.

Démonstration. Par le théorème 2.3.3, $\{\mathbf{St}(w)\}_{w\in L^0}$ est un recouvrement ouvert de [L]. Puisque f est continue, $\{f^{-1}(\mathbf{St}(w))\}_{w\in L^0}$ est un recouvrement ouvert de $[K]$. Puisque K est un espace métrique compacte, il existe $\delta > 0$ tel que chaque boule ouverte de rayon δ (ε de lebesgues ? ? ?) est contenue dans un ensemble du recouvrement. On peut donc maintenant choisir un n assez grand pour que maille $K_n < \delta/2$. Alors diam $[s] \leq \delta/2$ pour tout $s \in K_n$. De plus, pour chaque vertexe v dans K_n, $\mathbf{St}(v \subset B_v(\delta))$, mais $B_v(\delta) \subset f^{-1}(\mathbf{St}(w))$ pour un certain $w \in L^0$. Ainsi pour tout $v \in (K_n)^0$ on définit $\phi(v)$ comme un tel vertexe w (il n'y en à qu'un nombre fini). Ainsi $\phi : (K_n)^0 \to L^0$ est définie de sorte que $\mathbf{St}(v) \subset f^{-1}(\mathbf{St}(\phi(w)))$, et donc $f(\mathbf{St}(v)) \subset \mathbf{St}(\phi(w))$. Par le théorème 2.3.9, ϕ peut être étendue à une approximation simpliciale de f.

q.e.d

Corollaire 2.3.11
Soit $f : [K] \to [L]$ une fonction continue Alors pour $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision K_n et L_m de respectivement K et L et une approximation simpliciale $\phi : K_n \to L_m$ telle que $d(f, \phi) < \varepsilon$.

Démonstration. Par le théorème 2.2.11 il existe une subdivision de tout complexe avec une maille arbitrairement petite. Pour $\varepsilon > 0$ on peut donc trouver une telle subdivision L_m de L. De plus puisque $[L_m] = [L]$, f est une application de $[K]$ vers $[L_m]$. Par le théorème 2.3.10 il existe une subdivision de K_n et une approximation simpliciale $\phi : K_n \to L_m$ de f.
De plus, par le corollaire du théorème2.3.5, $d(f, \phi) \leq$ maille $L_m < \varepsilon$.

q.e.d

2.4 Groupe fondamental d'un complexe simplicial

Définition 2.4.1
Soient K et L des complexes simpliciaux. Deux fonctions simpliciales ϕ_1 et ϕ_2 de K dans L sont dites contiguës *si pour chaque simplexe $(v_0, \ldots, v_k) \in K$, il existe un simplexe $t \in L$ tel que $\phi_1(v_0), \ldots, \phi_1(v_k)$ et $\phi_2(v_0), \ldots, \phi_2(v_k)$ sont des vertexes de t.*

Définition 2.4.2
Deux fonctions simpliciales $\phi, \psi : K \to L$ sont contiguëment équivalentes, *noté $\phi \simeq_c \psi$, s'il existe une suite finie $(\phi_n)_{0\leq n\leq k}$ de fonctions simpliciales de K dans L telle que $\phi_0 = \phi$, $\phi_k = \psi$ et ϕ_i est contiguë à ϕ_{i-1} pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Théorème 2.4.3
Soient K et L des complexes simpliciaux et $f : [K] \to [L]$. Si ϕ_1 et ϕ_2 dont des approximations simpliciales de f, alors ϕ_1 et ϕ_2 sont contiguës.

Démonstration. Soit $(s) = (v_0, \ldots, v_k)$ un simplexe de K. Alors $f((s)) \subset f(\mathbf{St}(v_j)) \subset \mathbf{St}(\phi_i(v_j))$ pour tout $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$. Ainsi,

$$f((s)) \subset \bigcap_{j=0}^{k} \mathbf{St}(\phi_1(v_j)) \cap \bigcap_{j=0}^{k} \mathbf{St}(\phi_2(v_j)).$$

Soit (t) un simplex ouvert de L tel que $f((s)) \cap (t) \neq \emptyset$. Alors

$$(t) \subset \bigcap_{j=0}^{k} \mathbf{St}(\phi_1(v_j)) \cap \bigcap_{j=0}^{k} \mathbf{St}(\phi_2(v_j)),$$

et par conséquences $\phi_1(v_0), \ldots, \phi_1(v_k)$ et $\phi_2(v_0), \ldots, \phi_2(v_k)$ sont des vertexes de (t). q.e.d

Théorème 2.4.4
Si ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions simpliciales contiguës, alors ϕ_1 et ϕ_2 sont homotopes.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que pour tout $p \in [K]$, $\phi_1(p)$ et $\phi_2(p)$ sont éléments d'un même simplexe de L.
Soit donc $p \in (s) = (v_0, \ldots, v_k) \in K$, alors on peut exprimer p en coordonnées barycentriques $p = \sum_{j=0}^{k} a_j v_j$. Puisque ϕ_1 et ϕ_2 sont contiguës, $\phi_1(v_0), \ldots, \phi_1(v_k)$ et $\phi_2(v_0), \ldots, \phi_2(v_k)$ sont les vertexes d'un même simplexe $(t) \in L$. Ainsi $\phi_i(p) = \sum_{j=0}^{k} a_i \phi_(v_j)$ pour $i \in \{1, 2\}$.
On définit à présent $F : [K] \times I \longrightarrow [L]$ par

$$F(p, t) = (1 - t)\phi_1(p) + t\phi_2(p), \quad (p \in [K];\ t \in I).$$

Puisque $\phi_1(p)$ et $\phi_2(p)$ sont dans le même simplexe, alors $F(p, t)$ est bien dans L par convexité, de plus il est facile de voire que F est une homotopie de ϕ_1 vers ϕ_2.

q.e.d

Corollaire 2.4.5
Des fonctions simpliciales contiguës sont homotopiques.

Théorème 2.4.6
Soit K un complexe simplicial. Si α_0 et α_1 sont des lacets dans [K] tels que $\alpha_0 \simeq \alpha_1$, alors il existe une subdivision I' de I et des fonctions simpliciales ϕ_0 et ϕ_1 telles que

(i) ϕ_j *est une approximation simpliciale de* α_j*,*

(ii) $\phi_0 \simeq_c \phi_1$*.*

De plus, pour toute subdivision simpliciale de I*, on peut trouver une telle* I' *plus fine.*

Démonstration. Soit $F : I \times I \to [K]$ une homotopie de α_0 vers α_1. Puisque $\{\mathbf{St}(w)\}_{w \in K^0}$ est un recouvrement ouvert de $[K]$, on a que $\{F^{-1}(\mathbf{St}(w))\}_{w \in K^0}$ est un recouvrement de $I \times I$. Or, puisque $I \times I$ est un espace métrique compacte, il existe $\delta > 0$ telle que toute boule de rayon δ est contenue dans $F^{-1}(\mathbf{St}(w))$ pour un certain $w \in K^0$.
Choisissons maintenant une subdivision I' de I de vertexes $v_0 = 0, \ldots, v_s = 1$, et une autre division I'' de I de vertexes $l/2^k$, $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^k$. Ainsi donc $I' \times I''$ proviennent d'un complexe simplicial M de vertexes $v_j^l = (v_r, l/2^k)$ et de 2-simplexes de la forme $(v_r^l, v_{r+1}^l, v_{r+1}^{l+1})$ ou $(v_r^l, v_r^{l+1}, v_{r+1}^{l+1})$. (mettre peut être une image, cf singer p 96)
La subdivision peut être choisie suffisamment fine de la sorte que

$$\mathbf{St}(v_r) \times [(l-1)/2^k, (l+1)/2^k]$$

soit contenu dans une boule de rayon δ et, de là, contenue dans $F^{-1}(\mathbf{St}(w))$ pour un certain $w \in K^0$. Puisque $\mathbf{St}(v_r^l) \subset \mathbf{St}(v_r) \times [(l-1)/2^k, (l+1)/2^k] \subset F^{-1}(\mathbf{St}(w))$, par le théorème 2.3.9, on sait qu'il existe une fonction simpliciale $\Phi : M \to K$ qui est une approximation simpliciale de F et pour laquelle

$$\mathbf{St}(v_r) \times [(l-1)/2^k, (l+1)/2^k] \subset F^{-1}(\mathbf{St}\Phi(v_r^l)).$$

Posons maintenant $\phi_i = \Phi|_{I \times (i)}$, $i \in \{0, 1\}$ qui se trouvent donc être des approximations simpliciales de $F|_{I \times (i)} = \alpha_i$. Ce sont les fonctions demandées et il ne nous reste plus qu'à montrer qu'elles sont contiguëment homotopes. Soient $\psi_l = \Phi|_{I \times l/2^k}$. On a clairement $\psi_0 = \phi_0$ et $\psi_2^k = \phi_1$. Par le théorème 2.4.4, il nous suffit de montrer que $\psi_l \simeq_c \psi_{l+1}$ pour $l = 0, \ldots, 2^k - 1$, i.e. pour tout simplexe $(v_r, v_{r+1}) \in I'$, les vertexes $\psi_l(v_r) = \Phi(v_l^r)$, $\psi_l(v_{r+1}) = \Phi(v_{r+1}^l)$, $\psi_{l+1} = \Phi(v_r^{l+1})$ et $\psi_{l+1}(v_{r+1}) = \Phi(v_{r+1}^{l+1})$ se trouvent dans un même simplexe de K. Or

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i,j=0}^{1} \mathbf{St}(\Phi(v_{r+1}^{l+1})) \quad &\subset \quad F\left(\mathbf{St}(v_r) \times \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]\right) \cap F\left(\mathbf{St}(v_{r+1}) \times \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]\right) \\
&\subset \quad F\left((v_r, v_{r+1}) \times \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]\right)
\end{aligned}$$

qui est donc non-vide et donc contient un simplexe (t) de K qui contient les quatre vertexes susmentionnées. On a ainsi finit la démonstration.

q.e.d

Définition 2.4.7
Soit K un complexe simplicial. Un angle *de K est une paire ordonnée $e = |v_1, v_2|$ de vertexes de K telle que v_1 et v_2 sont élément d'un même simplexe de K.*
*v_1 est l'*origine *de e, v_2 la* fin. *Si $e = |v_1, v_2|$, alors l'angle $|v_2, v_1|$ est noté e^{-1}.*
Un chemin *dans K est une suite finie $\omega = e_1 e_2 \dots e_k$ d'angle de K tel que pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, la fin de e_i est le début e_{i+1}.*
Si deux routes $\omega = e_1 \dots e_k$ et $\tau = e'_1 \dots e'_m$ tels que la fin de ω est le début de τ, i.e. $e_k = e'_1$, on définit leur produit, *noté, $\omega\tau$, par :*

$$\omega\tau = e_1 \dots e_k e'_1 \dots e'_m.$$

*L'*inverse *d'une route $\omega = e_1 \dots e_k$ est la route $\omega^{-1} = e_k^{-1} \dots e_1^{-1}$.*
On définit une relation d'équivalence sur toutes les routes de K de la manière suivante :
si $e = |v_1 v_2|$ et $f = |v_2 v_3|$ sont tels que v_1, v_2 et v_3 appartiennent à un même simplexe, alors le produit ef est angulairement équivalent *à l'angle $|v_1 v_3|$.*
Doux routes ω et τ sont angulairement équivalentes, *noté $\omega \simeq_e \tau$, si τ peut être obtenu à partir de ω par une suite de telles équivalences angulaires élémentaires.*

Théorème 2.4.8
Soient K un complexe simplicial et v_0 un vertexe de K. Soit $E(K, v_0)$ l'ensemble des classes d'équivalences des routes dans K d'origine et de fin v_0. Alors $E(K, v_0)$ est un groupe dont l'opération est la multiplication, l'identité $|v_0 v_0|$ et l'inverse définit pour les chemins. $E(K, v_0)$ est appelé le lacet anguleux des groupes de *(K, v_0).*

Théorème 2.4.9
Soit K un complexe simplicial et v_0 un vertexe de K. Alors $E(K, v_0)$ est isomorphe à $\pi_1([K], v_0)$.

Démonstration. Nous allons construire un isomorphisme $k : E(K, v_0) \to \pi_1([K], v_0)$, on appellera un élément de $E(K, v_0)$ un chemin et de $\pi_1([K], v_0)$ une fonction chemin. Soit donc ω un chemin de K commençant et finissant en v_0. Alors $\omega = |v_0 v_1| \dots |v_{k-1} v_k|$ pour un certain ensemble $\{v_1, \dots, v_k\}$ de vertexes de K, avec $v_k = v_0$.
Voyons maintenant l'intervalle I comme l'espace d'un complexe simplicial de vertexes $\{0, 2/k, \dots, (k-1)/k, 1\}$. Considérons maintenant la fonction $\phi_\omega : I^0 \to K^0$ définie par $\phi_\omega(j/k) = v_j$. Puisque $|v_0 v_1| \dots |v_{k-1} v_k|$ est une

route, ϕ_ω peut être étendue à une fonction simpliciale de I ves K (qu'on nommera aussi ϕ_ω). On définit ainsi $h(\omega) = [\phi_\omega]_*$.

Remarquons que si $\omega \simeq_E \tau$, alors $\phi_\omega \simeq \phi_\tau$ et donc $h(\omega) = h(\tau)$ par le théorème 2.4.6 et donc h est bien définie. h est bien un homomorphisme, car pour $\omega = e_1 \dots e_k$ et $\tau = e'_1 \dots e'_m$ des chemins d'origine et de fin v_0, alors il est facile de trouver une homotopie entre $\phi_{\omega\tau}$ et $\phi_\omega \phi_\tau$. (cf dessin singer p.99)

h est surjective. Soit une fonction chemin $[a]_* \in \pi_1([K], v_0)$. Alors par le théorème 2.4.6, on peut trouver une subdivision I' de I et une approximation simpliciale $\phi : I' \to K$ de α qui de plus lui est homotope, et ainsi $[\phi]_* = [\alpha]_*$. Soient maintenant $t_0 < t_1 < \dots < t_k$ les vertexes de I' et la route $|\phi(t_0)\phi(t_1)| \dots |\phi(t_{k-1})\phi(t_k)|$ dans K. Alors $h(\omega) = [\phi]_* = [\alpha]_*$.

h est injective. Montrons que si $[h(\phi_\omega)]_* = [e_{v_0}]_*$, alors $\omega \simeq_e |v_0 v_0|$. Par le théorème 2.4.6, il existe une subdivision I' de I et des fonctions simpliciales ϕ_0 et ϕ_1 de I' dans K, approximations de respectivement ϕ_ω et e_{v_0} et telles que $\phi_0 \simeq_c \phi_1$ (la subdivision de I' peut être choisie plus fine que celle pour définir ϕ_ω). Maintenant, puisque e_{v_0} est une fonction simpliciale et ϕ_1 son approximation simpliciale, alors $e_{v_0} = \phi_1$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$\omega \simeq_e |v_0 v_0| .$$

Il nous suffit donc de montrer les deux faits suivants :

(i) si ϕ et ψ sont des fonctions contiguës simpliciales équivalentes de I' dans K, alors $\omega_\phi \simeq \omega_\psi$ où ω_ϕ et ω_ψ sont les chemins associés à ϕ et ψ.

(ii) si $\psi : I \to K$ est une fonction simpliciale et $\phi : I' \to K$ une approximation simpliciale de ψ sur une subdivision plus fine de I, alors $\omega_\psi \simeq_e \omega\phi$.

En effet, par (ii), $\omega = \omega_{\phi_\omega} \simeq \omega_{\phi_0}$, et par (i),

$$\omega_{\phi_0} \simeq_e \omega_{\phi_1} = \omega_{e_{v_0}} = |v_0 v_0| .$$

Démonstration de (i). Puisque $\simeq_e$ est une relation d'équivalence, il nous suffit de montrer que deux fonctions contiguës ont cette propriété. Soient donc $\psi, \psi : I' \to K$ deux fonctions simpliciales contiguës. On pose donc

$$\omega = |\phi(t_0)\phi(t_1)| \dots |\phi(t_{k-1})\phi(t_k)|$$

et

$$\omega = |\psi(t_0)\psi(t_1)| \dots |\psi(t_{k-1})\psi(t_k)| .$$

Ainsi

$$\omega_\phi \omega_\psi^{-1} = |\phi(t_0)\phi(t_1)| \dots |\phi(t_{k-1})\phi(t_k)| \, |\psi(t_k)\psi(t_{k-1})| \dots |\psi(t_1)\psi(t_0)| .$$

Mais puisque ϕ et ψ sont contiguës, $\phi(t_{k-1})$, $\phi(t_k)$, $\psi(t_k)$ et $\psi(t_{k-1})$ sont les vertexes d'un même simplexe. Or $\phi(t_k) = v_0 = \psi(t_k)$, donc

$$|\phi(t_{k-1})\phi(t_k)|\,|\psi(t_k)\psi(t_{k-1})| \simeq_e |\phi(t_{k-1}\psi(t_{k-1})|\,.$$

Similairement, toujours selon la contigüité,

$$|\phi(t_{k-2})\phi(t_{k-1})|\,|\phi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})| \simeq |\phi(t_{k-2})\psi(t_{k-1})|$$

et

$$|\phi(t_{k-2})\psi(t_{k-1})|\,|\psi(t_{k-1})\psi(t_{k-1})| \simeq |\phi(t_{k-2})\psi(t_{k-2})|\,.$$

On applique ce procédé itératif sur $\omega_\phi\omega_\psi^{-1}$, on obtient

$$\omega_\phi\omega_\psi^{-1} \simeq_e |\phi(t_0)\psi(t_0)| = |v_0v_0|\,.$$

Démonstration de (ii). Puisque la restriction de ψ au sous-complexe de I' constitué des vertexes $\{t_0, \ldots, t_k\}$ est une fonction simpliciale, $\phi(t_i) = \psi(t_i)$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. De plus on sait que $\psi : I \to K$ est une approximation simpliciale de ϕ et donc $(\psi(t_i, t_{i+1}))$ est un simplexe (s) de dimension 0 ou 1.

Assertion : Pour tout vertexe u de I' avec $t_i < u < t_{i+1}$, $\phi(u)$ est un vertexe de (s).
Puisque ϕ est une approximation simpliciale de ψ,

$$\psi(u) \in \psi(\mathbf{St}_{I'}(u)) \subset \mathbf{St}_K(\phi(u)).$$

Puisque $\psi(u) \in (s)$, $(s) \cap \mathbf{St}\phi(u) \neq \emptyset$, donc $(s) \subset \mathbf{St}\phi(u)$ et $\phi(u)$ est une simplexe de (s). Ainsi $\phi(u)$ est égal à $\psi(t_i)$ ou $\psi(t_{i+1})$ comme supposé.
Ainsi, si $u_0 = t_i < u_1 < \cdots < u_r = t_{i+1}$ sont les vertexes de I' entre t_i et t_{i+1}, alors $\{\phi(u_0), \ldots, \phi(u_r)\}$ sont les vertexes d'un même simplexe de K.
Remarquons que $\phi(u_0)$ est un vertexe de (s) car $\phi(u_0) = \phi(t_i) = \psi(t_i)$; de la même manière, $\phi(u_r)$ est un vertexe de (s).
Considérons maintenant la partie de ω_ψ et ω_ϕ provenant de la restriction de ψ et de ϕ à $[t_i, t_{i+1}]$. La partie de ω_ψ se trouve seulement être $|\psi(t_i)\psi(t_{i+1})|$.
La partie correspondante à ω_ϕ est

$$|\phi(u_0)\phi(u_1)|\,|\phi(u_1)\phi(u_2)| \ldots |\phi(u_{r-1})\phi(u_r)|\,.$$

Puisque $\{\phi(u_0), \ldots, \phi(u_r)\}$ sont les vertexes d'un même simplexe de K, leur angle est équivalent à $|\phi(u_0)\phi(u_r)| = |\phi(t_i)\phi(t_{i+1})| = |\psi(t_i)\psi(t_{i+1})|$. Ainsi les parties de ω_ψ et ω_ϕ sont angulairement équivalentes. Puisque cela est vrai pour tout i, $\omega_\psi \simeq_e \omega_\phi$.

q.e.d

Corollaire 2.4.10
Soient K un complexe simplicial, $v_0 \in K^0$ et $i : K^2 \to K$ l'injection des 2-squelettes de K dans K. Alors i induit un isomorphisme

$$i_* : E(K^2, v_0) \longrightarrow E(K, v_0).$$

En conséquent, l'inclusion $i_* : \pi_1([K^2], v_0) \to \pi_1([K^2], v_0)$ est un isomorphisme.

Démonstration. La définition d'équivalence angulaire ne dépend que de K^2.
q.e.d

2.5 Cohomologie simpliciale

Définition 2.5.1
Soit s un l-simplexe, de sommets $v_0, \ldots, v_l$. Deux suites de sommets de s $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_l})$ et $(v_{k_1}, \ldots, v_{k_l})$ sont dits équivalents *si $(k_1, \ldots, k_l)$ est une permutation de $(j_1, \ldots, j_l)$. Cela définit clairement une relation d'équivalence.*
Un simplexe orienté *est un simplexe s modulo la relation d'équivalence définie ci-dessus. Si $v_1, \ldots, v_r$ sont des sommets de s, le simplexe orenrienté déterminé par $(v_1, \ldots, v_r)$ est noté $< v_1, \ldots, v_r >$.*

Définition 2.5.2
Soit K un complexe simplicial et $\mathbb{R}$ le groupe des réels. Alors le groupe abélien libre généré par tous les simplexes orientés de K, modulo le sous-groupe généré par tous les éléments de la forme $< v_0, v_1, \ldots, v_l > + < v_1, v_0, \ldots, v_l >$, noté $C_l(K, \mathbb{R})$, est appelé groupe des l-chaines de K *à coefficients réels. Un élément typique de ce groupe est de la forme*

$$\sum_{s \text{ un } l\text{-simplexe}} n_s < s > \ (n_s \in \mathbb{R}),$$

où, pour chaque l-simplexe s, $< s >$ est une certaine orientation fixée de s, et où s avec l'orientation opposée est identifiée à $- < s >$.

Définition 2.5.3
Soit $< s >=< v_0, \ldots, v_l >$ un $(l+1)$-simplexe orienté. Le bord *$\partial < s >$ de $< s >$ est la l-chaine définie par*

$$\partial < s >= \sum_{i=0}^{l} (-1)^i < v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_l > .$$

La fonction de bord

$$C_l(K,\mathbb{R}) \xleftarrow{\partial} C_{l+1}(K,\mathbb{R})$$

est l'homomorphisme de groupe définit par

$$\partial\left(\sum g_s < s >\right) = \sum g_s \partial < s > .$$

Lemme 2.5.4
La chaine de fonction

$$C_{l-1}(K,\mathbb{R}) \xleftarrow{\partial} C_l(K,\mathbb{R}) \xleftarrow{\partial} C_{l+1}(K,\mathbb{R})$$

vérifie $\partial \circ \partial = 0$

Démonstration. Puisque ∂^2 est linéaire, il suffit de montrer cela pour les générateurs. Soit donc $< v_0, \ldots, v_{l+1} >$, on a donc

$$\begin{aligned}
\partial(\partial < v_0, \ldots, v_{l+1}) &= \partial\left[\sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i < v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{l+1} >\right] \\
&= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \partial < v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{l+1} > \\
&= \sum_{i,j} ((-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}) < v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{l+1} > \\
&= 0.
\end{aligned}$$

q.e.d

Définition 2.5.5
Soit K, alors on a les sous-groupes suivants

$$\begin{aligned}
Z_l(K,\mathbb{R}) &= \{c \in C_l(K,\mathbb{R}) \,|\, \partial c = 0\}, \\
B_l(K,\mathbb{R}) &= \{\partial c \,|\, c \in C_{l+1}(K,\mathbb{R})\}, \\
H_l(K,\mathbb{R}) &= Z_l(K,\mathbb{R})/B_l(K,\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Les éléments de $Z_l(K,\mathbb{R})$ sont les cycles*, ceux de $B_l(K,\mathbb{R})$ les* bords*. Le groupe $H_l(K,\mathbb{R})$ est le l-*ème groupe d'homologie de K à coefficients dans $\mathbb{R}$.

De la même manière, on définit l'objet dual :

Définition 2.5.6
Pour K un complexe simplicial, on définit $C^l(K)$ comme l'ensemble des fonctions de $C_l(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\partial^\star$, l'adjoint de ∂ est définit par

$$\partial^\star(\phi)(c) = \phi(\partial c).$$

De plus, on a toujours $\partial^\star \circ \partial^\star = 0$. *On définit enfin*

$$\begin{array}{rcl} Z^l(K) & = & \{\phi \in C^l(K) \,|\, \partial^\star phi = 0\}, \\ B^l(K) & = & \{\partial^\star \phi \,|\, \phi \in C^{l-1}(K)\}, \\ H^l(K) & = & Z^l(K)/B^l(K). \end{array}$$

Les éléments de $C^l(K)$ *sont appelés* cochaines*, ceux de* $Z^l(K)$ cocycles *et ceux de* $B^l(K)$ *les* cobords. *Le groupe* $H^l(K)$ *est le* l-ème groupe de cohomologie de K.

CHAPITRE 3

Théorème de De Rahm

3.1 Définitions

Définition 3.1.1
On appelle variété triangulée lisse *le triplet* (X, K, h) *où* X *est une varété* C^∞, K *un complexe simplicial et* $h : [K] \to X$ *un homéomorphisme de sorte que pour tout simplexe* s *de* K, *la fonction* $h|_{[s]} : [s] \to X$ *admet une extension* h_s *à un voisinage* U *de* $[s]$ *avec l'image de* $h_s : U \to X$ *une sous variété lisse.*

Remarque 3.1.2
On peut montrer que toute variété est triangulable [3].

Définition 3.1.3
Soit K *un complexe simplicial et* $v_1, \ldots, v_m$ *les vertexes de* K. *Soit* $x \in [K]$. *Pour* $j \in \{1, \ldots, m\}$, *la* jème coordonnée barycentrique $b_j(x)$ *de* x *est définie par : si* $x \notin \boldsymbol{St}(v_j)$, *alors* $b_j(x) = 0$, *si* $x \in \boldsymbol{St}(v_j)$, *alors* $x \in (s)$ *pour un certain simplexe* s *ayant* v_j *comme vertexe, et* $b_j(x)$ *est égale à la coordonnée barycentrique de* x *dans* s *relativement au vertexe* v_j.

Remarque 3.1.4
Il est facile de vérifier que

(i) $b_j : [K] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue,

(ii) $b_j(x) \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{m} b_j(x) = 1$ pour tout x dans $[K]$,

(iii) $x = \sum_{j=1}^{m} b_j(x) v_j$ et

(iv) $b_{j_0}(x)\ldots,b_{j_l}(x)$ sont non-nuls pour un certain $x \in [K]$ si et seulement si $v_{j_0},\ldots,v_{j_l}$ sont les vertexes d'un même simplexe de K.

Définition 3.1.5
*Soit K un complexe simplicial et s un simplexe de K. L'*étoilé *de s, noté $\boldsymbol{St}(s)$ est l'union de tous les simplexes ouverts (t) de K tel que (s) est une face de (t).*

Remarque 3.1.6 (i) Pour $s = v$ un 0-simplexe (i.e. un vertexe) de K, alors $\mathbf{St}(s) = \mathbf{St}(v)$ comme définit dans 2.3.2.

(ii) $\mathbf{St}(s)$ est un ouverte de $[K]$.

(iii) Si $(s) = (v_{j_0},\ldots,v_{j_l})$ et $x \in [K]$, alors $x \in \mathbf{St}(s)$ si et seulement si $b_{j_i}(x) \neq 0$ pour tout $i \in \{0,\ldots,l\}$.

(iv) Si $(s) = (v_{j_0},\ldots,v_{j_l})$, alors

$$[K] - \mathbf{St}(s) = [x \in [K] \,|\, b_{j_i}(x) = 0 \text{ pour un certain } i \in \{0,\ldots,l\}].$$

(v) Si s_1 et s sont des l-simplexes de K avec $s_1 \neq s$, alors $[s_1] \subset [K]-\mathbf{St}(s)$.

On veut maintenant comparer la cohomologie de De Rahm et la cohomologie singulière à travers un homomorphisme, qui se révèlera plus tard être un isomorphisme. Soit donc une variété triangulée lisse (X,K,h). Remarquons tout d'abord que pour une suite de fonctions données

$$f_l : C^\infty(X,\Lambda^l(X)) \to C^l(K)$$

telles que $\partial^\star \circ f_l = f_{l+1} \circ d$ pour tout l, i.e. le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^\infty(X,\Lambda^l(X)) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_l"] & C^\infty(X,\Lambda^{l+1}(X)) \arrow[r] \arrow[d, "f_{l+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^l(K) \arrow[r, "\partial^\star"] & C^{l+1}(K) \arrow[r] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

on peut déduire que $f_l(Z^l(X,d)) \subset Z^l(K)$, car pour $\omega \in Z^l(X,d)$

$$\partial^\star(f_l(\omega)) = f_{l+1}(d\omega) = f_{l+1}(0) = 0.$$

De la même manière pour $\omega = d\tau$

$$f_l(\omega) = f_l(d\tau) = \partial^\star(f_{l-1}\tau) \in \text{Im } \partial^\star.$$

Les f_l induisent donc une suite de fonctions $\widetilde{f_l} : H^l(X,d) = Z^l(X,d)/B^l(X,d) \to Z^l(K)/B^l(K) = H^l(K)$.
Il nous faut maintenant donc définir une telle suite de f_l, par

$$\int_l : C^\infty(X, \Lambda(X)) \to C^l(K).$$

Pour $\omega \in C^\infty(X, \Lambda^l(X))$, $\int_l(\omega)$ doit être une fonctionelle linéaire sur $C_l(K)$. Ainsis il suffit de spécifier les valeures de $\int_l(\omega)$ sur les éléments de base de $C_l(K)$, c'est-à-dire sur les l-simplexes orientés $< s >$. Pour le faire, on considère la fonction lisse $h_s : U \to X$. Ainsi $h_s^\star(\omega)$ est une l-forme lisse sur U, un ouvert du plan de $[s]$, donc dans un espace Euclidien de dimension l. On définit alors notre fonction comme l'intégrale de cette l-forme sur $< s >$:

$$\int_l(\omega)(< s >) = \int_{<s>} h_s^\star(\omega).$$

En d'autres mots, soit $(r_1, \dots, r_l)$ est un système de coordonnée dans le plan de $[s]$ selon l'orientation de $< s >$, i.e. si $< s > = < v_0, \dots, v_l >$, alors $(r_1, \dots, r_l)$ sont les coordonnées relativement à la base ordonnée $\{v_1 - v_0, \dots, v_l - v_0\}$. Alors

$$h_s^\star(\omega) = g dr_1 \wedge \dots \wedge dr_l,$$

pour une fonction continue g sur U, et

$$\int_l(\omega)(< s >) = \int_{[s]} g\, dr_1 \dots dr_l \text{ intégrale au sens de Riemann.}$$

Remarquons que l'intégrale est indépendante de l'homéomorphisme h, car elle dépend uniquement de l'ensemble de point $h([s])$ et de son orientation par le théorème de changement de variable.
Assertion :

$$\partial^\star \circ \int_l = \int_{l+1} \circ d.$$

En fait, il s'agit juste du théorème de Stokes. Pour une l-forme lisse et un

$(l+1)$-simplexe orienté $< s >$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{l+1} \circ d(\omega)\right)(< s >) &= \int_{<s>} (h_s)^\star(d\omega) \\
&= \int_{<s>} d(h_s^\star(\omega)) \\
&= \int_{\partial<s>} h_s^\star(\omega) \quad \text{par le théorème de Stokes} \\
&= \int_l (\omega)(\partial < s >) \\
&= \left(\partial^\star \circ \int_l (\omega)\right) < s > .
\end{aligned}$$

Ainsi $\int_l$ induit un homomorphisme $\widetilde{\int_l} : H^l(X,d) \to H^l(K)$.

3.2 Théorème de De Rahm

Théorème 3.2.1
de De Rahm Soit (X, K, d) une variété triangulée lisse. Alors

$$\widetilde{\int_l} : H^l(X,d) \to H^l(K)$$

est un isomorphisme pour tout l ente 0 et $\dim X$.

Ce théorème est une conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.2
Il existe une suite de fonctions linéaires

$$\alpha_l : C^l(K) \to C^\infty(X, \Lambda(X)) \ \ (0 \leq l \leq \dim X)$$

avec les propriétés suivantes :

(i) $d \circ \alpha_l = \alpha_{l+1} \circ \partial^\star$,

(ii) $\int_l \circ \alpha_l = \mathrm{id}$,

(iii) si c^0 est la 0-cochaine telle que $c^0(v) = 1$ pour tout vertexe v dans K, alors $\alpha_0(c^0) = 0$, c'est-à-dire la 0-forme constante,

(iv) Si $< s >$ est un l-simplexe orienté de K, alors la l-forme $\alpha_l(\phi_{<s>})$ est iddentiquement nulle sur un voisinage de $X - \boldsymbol{St}(s)$.

Lemme 3.2.3
Soit ω une l-forme fermée sur X. Si $\int_l(\omega) = \partial^\star c$ pour un $c \in C^{l-1}(K)$, alors il existe une $(l-1)$-forme τ sur X telle que $\int_{l-1}(\tau) = c$ et $d\tau = \omega$.

Remarque 3.2.4
Par le lemme 3.2.2, on voit que $\widetilde{\int_l}$ est surjective. Pour $z \in Z^l(K)$, soit $\omega = \alpha_l(z)$. Alors $\omega \in Z^l(X,d)$ car

$$d\omega = d \circ \alpha_l(z) = \alpha_{l+1} \circ \partial^\star(z) = \alpha_{l+1}(0) = 0.$$

De plus $\int_l(\omega) = \int_l \circ\alpha_l(z) = z$. Ainsi $\int_l : Z^l(X,d) \to Z^l(K)$ est surjective, donc a posteriori $\widetilde{\int_l}$.
Le lemme 3.2.3 nous montre l'injectivité de $\widetilde{\int_l}$. On a que $\ker(\widetilde{\int_l}) = B^l(X,d)$. Ainsi la fonction construite est un isomorphisme.

3.3 Démonstration du théorème

Démonstration du lemme 3.2.2. Par convention d'écriture, on identifie $[K]$ à X par l'homéomorphisme h. Ainsi on a $[K] = X$ et $h = \mathrm{id}$.
Étape 1. Commençons par construire une partition de l'unité basée sur le recouvrement ouvert de X :

$$\{\mathbf{St}(v) \,|\, v \text{ un vertexe de } K\}.$$

Soient $v_1, \ldots, v_m$ les vertexes de K. Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, soit b_j la $j$ème coordonnée barycentrique sur $[K] = X$ et pour $n = \dim(X)$

$$\begin{aligned} F_j &= \left[x \in X \,|\, b_j(x) \geq \frac{1}{n+1}\right] \\ G_j &= \left[x \in X \,|\, b_j(x) \leq \frac{1}{n+2}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi F_j et G_j sont des fermés de X ayant les propriétés suivantes :

1. $F_j \subset \mathbf{St}(v_j)$,
2. $X - \mathbf{St}(v_j) \subset G_j$,
3. $F_j \cap G_j = \emptyset$, i.e. $F_j \subset X - G_j$.
4. Il existe une fonction lisse $f_j \geq 0$ telle que $f_j > 0$ sur F_j et $f_j = 0$ sur G_j (F_j est un fermé dans un compacte et par là-même compacte ; ainsi on peut trouver une fonction $f_j \geq 0$ stricement positive sur F_j et nulle à l'extérieur de l'ouvert $X - G_j$),

5. Les fermés F_j couvrent X. (Soit $x \in X$, alors $x \in (s)$ pour un simplexe $(s) = (v_{j_0}, \ldots, v_{j_l})$ de dimention $l \leq n$. Maintenant $b_j(x) = 0$ pour $j \notin \{j_0, \ldots, j_l\}$ et $\sum_{i=0}^{l} b_{j_i}(x) = 1$. Puisque $l+1 \leq n+1$, $b_j(x) \geq 1/(n+1)$ pour un certain $j \in \{j_0, \ldots, j_l\}$. Ainsi $x \in F_j$ pour ce j.) En particulier, pour chaque $x \in X$, $f_j(x) \neq 0$ pour un certain j. De plus, $X - G_j$ est aussi un recouvrement ouvert de X.
6. De part le point 5, $\sum_{j=1}^{m} f_j > 0$, et donc $g_j = f_j / \sum_{k=1}^{m} f_k$ est bien définie et lisse sur X. Ainsi, $\{g_j\}$ est une partition lisse de l'unité sur X selon la partition $\{X - G_j\}$; i.e. $\sum_{j=1}^{m} g_j = 1$ et g_j s'annule sur G_j. Puisque $X - G_j \subset \mathbf{St}(v_j)$, la partition de l'unité $\{g_j\}$ est aussi selon le recouvrement $\{\mathbf{St}(v_j)\}$.

Étape 2. Nous allons mainenant définire les α_l avec la partition de l'unité $\{g_j\}$ que nous avons faite à l'étape 1. Puisque les α_l sont linéaires, il suffit de les définire sur les générateurs $\phi_{<s>}$ de $C^l(K)$. Pour $< s > = < v_{j_1}, \ldots, v_{j_l} >$ un l-simplexe orienté, on définit $\alpha_l(\phi_{<s>})$ par la l-forme suivante :

$$\alpha_l(\phi_{<s>}) = l! \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} \, dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l}.$$

Il nous faut maintenant vérifier les propriétés (i) à (iv) :
Propriété (i). Clairement,

$$d \circ \alpha_l(\phi_{<s>}) = (l+1)! \, dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l}.$$

De l'autre côté,

$$\begin{aligned} \alpha_{l+1} \circ \partial^\star(\phi_{<s>}) &= \alpha_{l+1}\left(\sum_{v_k} \phi_{<v_k, v_{j_0}, \ldots, v_{j_l}>}\right) \\ &= (l+1)! \sum_{k} [g_k \, dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_l} \, dg_k \wedge dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_l}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l}]. \end{aligned}$$

Assertion : Si les vertexes $v_k, v_{j_0}, \ldots, v_{j_l}$ sont distincts et ne font pas partie des vertexes d'un même $(l+1)$-simplexe de K, alors

$$g_k \, dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} \equiv 0.$$

En effet, si $x \notin \mathbf{St}(v_k)$, alors $b_k \neq 0$. Mais maintenant $b_{j_i} = 0$ pour un certain $i \in \{0, \ldots, l\}$ car si $b_m \neq 0$, alors $(v_k, v_{j_0}, \ldots, v_{j_l})$ est un $(l+1)$-simplexe ce qui est une contradiction. Pour ce i, soit

$$U = \left[y \in X \mid b_{j_i}(y) < \frac{1}{n+2} \right].$$

Ainsi U est un ouvert de X contenant x, et g_{j_i} est iddentiquement nulle sur U car $U \subset G_{j_i}$. Ainsi $g_{j_i} \equiv 0$ et en particulier $dg_{j_i}(x) = 0$, ce qui complète la preuve de l'assertion.
On peut donc appliquer ce résultat à la formule ci-dessus :

$$\sum_k g_k \, dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} = \sum_{k \notin \{j_0, \ldots, j_l\}} dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l},$$

On calcule l'autre terme de la somme :

$$\begin{aligned}
&\sum_k \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} \, dg_k \wedge dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} \\
&= \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \sum_k g_{j_i} dg_k \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} \\
&= \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \sum_{k \notin \{j_0, \ldots, j_l\}} g_{j_i} dg_k \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} \\
&= \sum_{i=0}^{l} (-1)^i \sum_{k \notin j_i} g_{j_i} dg_k \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} \\
&= \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} \left(\sum_{k \notin j_i} dg_k \right) \wedge dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} \\
&= \sum_{i=0}^{l} (-1)^i g_{j_i} (-g_{j_i}) \wedge dg_k \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l} \\
&= -\sum_{i=0}^{l} g_{j_i} \, dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l},
\end{aligned}$$

puisque $\sum_{k=1}^m g_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^m dg_k = 0$. En regroupant les deux termes, on a le résultat voulu.
Propriété (iii). Puisque $\alpha_0(\phi_{<v_j>}) = g_j$,

$$\alpha_0(c^0) = \alpha_0 \left(\sum_{j=1}^{m} \phi_{<v_j>} \right) = \sum_{j=1}^{m} g_j = 1.$$

Propriété (iv). Supposons $< s >=< v_{j_0}, \dots, v_{j_l} >$. Alors

$$\alpha_l(\phi_{<s>}) = l! \sum_{j=1}^{l} (-1)^i \, g_{j_i} \, dg_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{dg_{j_i}} \wedge \cdots \wedge dg_{j_l}.$$

Remarquons que si $x \in X$ est de la sorte que $b_{j_k}(x) < 1/(n+2)$ pour un certain k, alors $x \in G_{j_k}$, g_{j_k} et dg_{j_k} s'annulent sur x et $\alpha_l(\phi_{<s>})$. Ainsi $\alpha_l(\phi_{<s>})$ est iddentiquement nulle sur

$$\{x \in X \,|\, b_{j_k} < \frac{1}{n+2} \text{ pour un certain } k \in 0, \dots, l\},$$

qui est un ouvert contenant $X - \mathbf{St}(s)$.
Propriété (ii), démonstration par induction. Pour $l = 0$, $\int_0 \circ \alpha_0(\phi_{<v_j>})$ est la 0-cochaine donnée par

$$\left[\int_0 \circ \alpha(\phi_{<v_j>})\right] (< v_k >) = \left[\int_0 (g_j)\right] < v_k >= g_j(v_k).$$

Mais remarquons que si $k \neq j$, alors $g_j(v_k) = 0$, puisque $v_k \notin \mathbf{St}(v_j)$ et $g_j = 0$ à l'extérieur de $\mathbf{St}(v_j)$. Ainsi

$$1 = \sum_{j=1}^{m} g_j(v_k) = g_k(v_k) \qquad \text{pout tout } k.$$

Donc

$$\begin{aligned}\left[\int_0 \circ \alpha_0(\phi_{<v_j>})\right] (< v_k >) &= \begin{cases} 1 \text{ si } k = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &= \phi_{<v_j>}(< v_k >).\end{aligned}$$

Comme cela est valable pour tout j et k, on a forcément $\int_0 \circ \alpha_0 = \text{id}$.
Supposons maintenant cela vrai pour les dimensions strictement plus petites que l. Pour $< s >$ et $< t >$ des l-simplexes orientés de K,

$$\left[\int_l \circ \alpha_l(\phi_{<s>})\right] < t >= \int_{<t>} \alpha_l(\phi_{<s>}).$$

On doit maintenant montrer que cette expression vaut 1 si $< s >=< t >$ et 0 sinon. Si $s \neq t$, alors elle vaut bien 0 par la propriété (iv) puisque $\alpha_l(\phi_{<s>})$ est iddentiquement nulle sur un voisinage de $X - \mathbf{St}(s) \supset [t]$. Il ne nous reste qu'à montrer que $\int_{<s>} \alpha_l(\phi_{<s>}) = 1$. Pour cela, soit $< r >=< v_{j_1}, \dots, v_{j_l} >$ et $s =< v_{j_0}, \dots, v_{j_l} >$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{<s>} \alpha_l(\partial^\star \phi_{<r>}) &= \int_{<s>} d[\alpha_{l-1}(\phi_{<r>})] \\ &= \int_{\partial <s>} \alpha_{l-1}(\phi_{<r>}),\end{aligned}$$

par la formule de Stokes. Mais $\partial < s >=< r >$ plus une somme alternée d'autres $(l-1)$-simplexes orientés. Ainsi

$$\int_{\partial <s>} \alpha_{l-1}(\phi_{<r>}) = \int_{<r>} \alpha_{l-1}(\phi_{<r>}) = 1$$

par induction. Ainsi

$$\begin{aligned}1 = \int_{<s>} \alpha_l(\partial^\star \phi_{<r>}) &= \int_{<s>} \alpha_l(\phi_{<s>} + \text{ termes de types } \phi_{<t>} \, (t \neq s)) \\ &= \int_{<s>} \alpha_l(\phi_{<s>}).\end{aligned}$$

q.e.d

Pour prouver le lemme 3.2.3, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.1
Soit s un k-simplexe de $\mathbb{R}^n$. Alors

(a_r) *soient $r \geq 0$ et $k \geq 1$. Soit ω une r-forme lisse et fermée définie au voisinage de $[s^{k-1}]$. Si $k = r+1$, on sait que $\int_{\partial <s>} \omega = 0$. Alors il existe une r-forme lisse et fermée définie à proximité de $[s]$ telle que $\tau = \omega$ sur un voisinage de $[s^{k-1}]$.*

(b_r) *soient $r \geq 1$ et $k \geq 1$. Soit ω une r-forme lisse et fermée définier au voinage de $[s]$. Soit τ une $(r-1)$-forme lisse définie au voisinage de $[s^{k-1}]$ telle que $d\tau = \omega$ au voisinage de $[s^{k-1}]$. Si $k = r$, on sait que $\int_{\partial <s>} \tau = \int_{<s>} \omega$. Alors il existe une $(r-1)$-forme lisse τ' définie au voisinage de $[s]$ telle que $\tau' = \tau$ au voisinage de $[s^{k-1}]$, et $d\tau' = \omega$ au voisinage de $[s]$.*

Démonstration du lemme 3.3.1. Nous allons montrer par induction que (a_0) est vérifié et que

$$(a_i) \Rightarrow (b_{i+1}) \Rightarrow (a_{i+1})$$

(a_0) : ω est une 0-forme, i.e. zbe finction lisse définie au voisinage de $[s^{k-1}]$, et $d\omega = 0$ puisque ω est constante sur les composantes de son domaine. Si $k > 1$, $[s^{k-1}]$ est connexe par arcs, alors ω est une fonction constante c dans un voisinage de $[s^{k-1}]$. Soit $\tau = c$ dans un voisinage de $[s]$. Si $k = 1$, alors $< s >=< v_0, v_1 >$ pour une paire de vertexes v_0, v_1 et

$$0 = \int_{\partial<s>} \omega = \omega(v_1) - \omega(v_0).$$

Ainsi la valeur constante de ω au voisinage de v_1 est égale à celle au voisinage de v_0, et donc ω est contante au voisinage de $[s^{k-1}]$. On place donc τ égale à cette fonction constante au voisinage de $[s]$.
$(a_{r-1}) \Rightarrow (b_r)$: ω est une r-forme fermée ($r \geq 1$) définie sur un ouvert contenant $[s]$. Par le lemme de Poincaré, ω est exacte dans un voisinage de $[s]$, i.e. il existe une $(r-1)$-forme τ_1 lisse définie au voisinage de $[s]$ telle que $d\tau_1 = \omega$ (c'est aussi conséquance de l'invariance homotopique de la cohomologie de De Rahm).
Cependant, le τ_1 choisi n'est pas forcément égale à τ au voisinage de $[s^{k-1}]$. Considérons donc leur différence, qui est fermée dans un voisinage de $[s^{k-1}]$, i.e.

$$d(\tau_1 - \tau) = \omega - \omega = 0.$$

Avec $k = (r-1) + 1 = r$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial<s>} (\tau_1 - \tau) &= \int_{\partial<s>} (\tau_1) - \int_{\partial<s>} \tau \\ &= \int_{<s>} d\tau_1 - \int_{\partial<s>} \tau \\ &= \int_{<s>} \omega - \int_{\partial<s>} \tau \\ &= 0 \quad \text{par hypothèse.} \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer (a_{r-1}) à la forme $\tau_1 - \tau$. Il existe donc une $(r-1)$-forme lisse et fermée μ définie dans un voisinage de $[s]$ telle que $\mu = \tau_1 - \tau$ au voisinage de $[s^{k-1}]$. Soit maintenant $\tau' = \tau_1 - \mu$, alors τ' est une $(r-1)$-forme lisse définie au voisinage de $[s]$ telle que $\tau' = \tau_1 - \mu = \tau$ au voisinage de $[s^{k-1}]$, et $d\tau' = d\tau_1 - d\mu = \omega - 0 = \omega$ au voisinage de $[s]$.
$(b_r) \Rightarrow (a_r)$: $< s >=< v_0, \ldots, v_k >$ pour un choix de vertexes $v_o, \ldots, v_k$, et soit $< t >=< v_1, \ldots, v_k >$. Soit encore $F = [s^{k-1}] - (t)$. Puisque ω est fermé, par le lemme de Poincaré on a l'existance d'une $(r-1)$-forme lisse μ définie au voisinage de F telle que $d\mu = \omega$ au voisinage de F, car F est un étoilé. En particulier, $d\mu = \omega$ au voisinage de $[t^{k-2}]$.

Si $k > 1$, nous voudrions appliquer (b_r) aux formes ω et μ et au $(k-1)$-simplexe t. Pour ce faire, nous devons vérifier que si $k-1 = r$, alors $\int_{<t>} \omega - \int_{\partial<t>} \mu = 0$. Soit $c = \partial < s > - < t >$, donc $\partial c = -\partial < t >$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{<t>} \omega - \int_{\partial<t>} \mu &= \int_{<t>} \omega + \int_{\partial c} \mu \\
&= \int_{<t>} \omega + \int_{c} d\mu \\
&= \int_{<t>} \omega + \int_{c} \omega \quad \text{(chaque simplexe de } c \text{ est contenu dans } F) \\
&= \int_{\partial<s>} \omega \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par (b_r), il existe une forme μ' définie au voisinage de $[t]$ telle que $\mu' = \mu$ au voisinage de $[t^{k-2}]$ et $d\mu' = \omega$ au voisinage de $[t]$. Soit maintenant μ_2 la forme définie au voisinage de $[s^{k-1}]$ en "collant" ensemble μ et μ' le long de leur domaine commun, i.e. un ouvert qui convient. Alors $d\mu_2 = \omega$ au voisinage de $[s^{k-1}]$, puisque μ et μ' ont cette propriété sur leurs domaines de définition respectifs.
Si $k = 1$, alors $[s^{k-1}]$ est constitué de deux vertexes v_0 et v_1. Puisque ω est fermée, par le lemme de Poincaré il existe une $(r-1)$-forme lisse μ_i au voisinage de v_i, $i = 0, 1$ telle que $d\mu_i = \omega$. Quitte à réduire les domaines, on peut supposer que les domaines μ_0 et μ_1 sont disjoints. Cela définie μ_2 au voisinage de $[s^{k-1}]$, avec $d\mu_2 = \omega$ au voisinage de $[^{k-1}]$ comme auparavant.
Finallement, soit f une fonction lisse identiquement 1 dans une petit voisinage de $[s^{k-1}]$ et identiquement nule à l'extérieur du domaine de μ_2. Ainsi $f\mu_2$ est une $(r-1)$-forme lisse définie au voisinage de $[s]$. Soit $\tau = d(f\mu_2)$. Alors τ est une r-forme fermée définie au voisinage de $[s]$, et vaut au voisnage de $[s^{k-1}]$

$$\tau = d(f\mu_2) = df \wedge \mu_2 + f d\mu_2 = d\mu_2 = \omega,$$

puisque $f \equiv 1$ et $df \equiv 0$ au voisinage de $[s^{k-1}]$.

q.e.d

Démonstration du lemme 3.2.3. Nous allons construire par induction une suite

$$\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n = \tau \quad (n = \dim X)$$

de $(l-1)$-formes telle que

1. τ_k est défini dans un voisinage du k-squelette $[K^k]$ de K,
2. $d\tau_k = \omega$ au voisnage de $[K^k]$,

3. $\tau_k = \tau_{k-1}$ au voisinage de $[K^{k-1}]$, et
4. $\int_{l-1}(\tau_{l-1}) = c$.

Remarquons que cela démontre le lemme, car le quatrième point implique que pour chaque $(l-1)$-simplexe orienté $< s >$ de $[K]$ et chaque $k \geq l-1$,

$$\int_{l-1}(\tau_k)(< s >) = \int_{<s>} \tau_k = \int_{l-1} \tau_{l-1} = \int_{l-1}(\tau_{l-1})(< s >) = c(< s >).$$

Pour construire τ_0, on recouvre K^0 par une collection de boules mutuellement disjointes. Puisque ω est fermée, ω est exacte dans chacune de ces boules par le lemme de Poincaré. Ainsi il existe une $(l-1)$-forme lisse t_0', définie sur l'union des boules telle que $d\tau_0' = \omega$. Si $l_1 \neq 0$, on prend $\tau_0 = \tau_0'$. Si $l-1 = 0$, on veut que $\int_0(\tau_0) = c$. Mais pour v_j un vertexe de $[K]$,

$$\int_0(\tau_0')(< v_j >) = \int_{<v_j>} \tau_0' = \tau_0'(v_j).$$

Soit $a_j = c(v_j) - \tau_0'(v_j)$, et on définit τ_0 sur la boule autour de v_j par $\tau_0 = \tau_0' + a_j$. Ainsi $d\tau_0 = d\tau_0' = \omega$ au voisinage de $[K^0]$, et $\int_0(\tau_0) = c$ comme demandé.

Soit maintenant τ_{k-1} construit par récurence avec les propriétés un à quatre et on cherche à construire τ_k. Remarquons tout d'abord que pour chaque k-simplexe s, on peut trouver une $(l-1)$-forme lisse définie au voisinage de $[s]$ telle que $d(\tau_k(s)) = \omega$ au voisinage de $[s]$, et $\tau_k(s) = \tau_{k-1}$ au voisinage de $[s^{k-1}]$. On veut "coller" ces formes en une $(l-1)$-forme τ_k' satisfaisant les propriétés un à trois.

Pour construire $\tau_k(s)$, on va appliquer (b_l) du lemme 3.3.1. Remarquons que ω est une l-forme lisse et fermée définie au voisinage de $[s]$ et que τ_{k-1} est une $(l-1)$-forme lisse définie au voisinage de $[s^{k-1}]$ telle que $d\tau_{k-1} = \omega$ au voisinage de $[s^{k-1}]$. De plus, si $k = l$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{<s>} &= \int_l(\omega)(< s >) \\
&= \partial^\star c(< s >) \\
&= c(\partial < s >) \\
&= \int_{k-1}(\tau_{k-1})(\partial < s >) \\
&= \int_{\partial<s>} \tau_{k-1}.
\end{aligned}$$

On peut ainsi appliquer (b_l). Il existe ainsi une $(l-1)$-forme lisse $\tau_k(s)$ au voisinage de $[s]$ telle que $\tau_k(s) = \tau_{k-1}$ au voisniage de $[s^{k-1}]$ et $d(\tau_k(s)) = \omega$

au voisinage de $[s]$.
On a ainsi construit τ'_k satisfaisant un à trois. Si $k \neq l-1$, alors $\tau_k = \tau'_k$. Si $k = l-1$, on a τ'_{l-1} satisfaisant les propriétés un à trois, et on veut trouver τ_{l-1} telle que $\int_{l-1}(\tau_{l-1}) = c$. Soit $c_1 = c - \int_{l-1}(\tau'_{l-1})$, et on définit τ_{l-1} dans un voisinage de $[K^{l-1}]$ par

$$\tau_{l-1} = \tau'_{l-1} + \alpha_{l-1}(c_1),$$

où α_{l-1} est une fonction linéaire $C^{l-1}(K) \to C^\infty(X, \Lambda^{l-1}(X))$ définie dans le lemme 3.2.2.
Pour chaque r et chaque r-simplexe orienté $< s >$, remarquons que $\alpha_r(\phi_{<s>})$ est identiquement nulle dans un voisinage de $X - \mathbf{St}(s)$. En particulier, $\alpha_r(\phi_{<s>})$ est identiquement nulle au voisinage de $[K^{r-1}]$. Puisque chaque $c \in C^r(K)$ est une combinaison linéaire de tels $\phi_{<s>}$, on a que $\alpha_r(c)$ est identiquement nulle au voisinage de $[K^{r-1}]$ pour chaque r-cochaine c.
En appliquant cela tout d'abord à $r = l$, puis à $r = l-1$, on trouve

$$d\tau_{l-1} = d\tau'_{l-1} + d \circ alpha_{l-1}(c_1) = d\tau'_{l-1} + \alpha_l \circ \partial^\star(c_1) = d\tau'_{l-1} = \omega$$

au voisinage de $[K^{l-1}]$ et

$$\tau_{l-1} = \tau'_{l-1} + \alpha_{l-1}(c_1) = \tau'_{l-1} = \tau_{l-2}$$

au voisinage de $[K^{l-2}]$. Ainsi τ_{l-1} satisfait les propriétés un à trois avec $k = l-1$. La propriété quatre est de fait aussi satisfaite :

$$\begin{aligned}
\int_{l-1}(\tau_{l-1}) &= \int_{l-1}(\tau'_{l-1}) + \int_{l-1} \circ \alpha_{l-1}(c_1) \\
&= (c - c_1) + c_1 \\
&= c.
\end{aligned}$$

q.e.d

CHAPITRE 4

Cohomologie relative

Les chapitres suivants sont tirés du Godbillon [1].

4.1 Introduction et définitions

Définition 4.1.1
Pour M une variété de dimension m et $N \subset M$ une sous-variété de M, on définit $\Lambda(M, N)$ l'ensemble des formes différentiables $\alpha \in \Lambda(M)$ qui s'annulent sur N.
On note $\Lambda_c(M, N)$ les formes à support compact sur M nulles sur N.

Proposition 4.1.2
$\Lambda(M, N)$ est un idéal de $\Lambda(M)$

Proposition 4.1.3
Pour i le plongement de N dans M et $\boldsymbol{d}$ la différentiable, on a

$$i^\star \circ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d} \circ i^\star,$$

pour $\boldsymbol{d}$ restreint au bon domaine.

Définition 4.1.4
*$H^p(M, N)$ est l'*espace de cohomologie relative de dimension p de M modulo N*, définit comme le quotient des formes exactes par les formes fermées de $\Lambda(M, N)$.*

Proposition 4.1.5
On a $H^p(M,N) = H_c^p(M,N) = 0$ *pour* $p < 0$ *et* $p > m$.

Proposition 4.1.6
On a $H(M,M) = H_c(M,M) = 0$.

Proposition 4.1.7
Si M *est connexe et* N *non-vide, on a*

$$H^0(M,N) = H_c^0(M,N) = 0.$$

Démonstration. En effet, dans ces conditions une fonction constante nulle sur N est nulle sur tout M par connexité par arcs. En conséquent $Z^0(M,N) = Z_c^0(M,N) = 0$. q.e.d

4.2 Applications

Soit f une application différentiable de M vers V deux variétés lisses. Alors pour N une sous-variété de M, $f(N)$ est contenue dans une sous-variété W de V. On pose

$$f^\star : \Lambda(V,W) \to \Lambda(M,N),$$

l'homomorphisme définit par f de la manière suivante : pour $\omega \in \Lambda(V,W)$ on a $f^\star(\omega) : M \to \mathbb{R}$ avec pour $p \in M$, $f^\star(\omega)(p) = \omega(f(p))$.
Remarquons tout d'abord que cette application est bien définie, i.e. que si $p \in N$, alors pour tout $\omega \in \Lambda(V,W)$ on a bien $f^\star(\omega)(p) = 0$. En effet, en développant on remarque que $f^\star(\omega)(p) = \omega(f(p)) \in \omega(W) = \{0\}$ car $f(N) \subset W$.
On a, de plus, $f^\star(Z(V,W)) \subset Z(M,N)$ et $f^\star(B(v,W)) \subset B(M,N)$ par différentiabilité de f. Ainsi $f^\star$ induit un homomorphisme de $H^\star(W,V)$ dans $H^\star(M,N)$, qu'on notera encore $f^\star$. De plus, si f est un isomorphisme, alors on a immédiatement que $f^\star$ est aussi un isomorphisme. Ensuite, pour f et g des fonctions lisses de M vers V vers X et N, W et Y les sous-variétés asociées, alors $(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star$.

Proposition 4.2.1
Soit j *l'injection de* $(M,\emptyset)$ *vers* (M,N). *Alors les homomorphismes* $j^\star : H^p(M,N) \to H^p(M)$ *et* $j^\star : H_c^p(M,N) \to H_c^p(M)$ *sont des isomorphismes pour* $p > n+1$ *(où* n *est la dimension de* M*).*

Démonstration. Soit $\alpha \in \Lambda^p(M,\emptyset)$ et $i : N \to M$ l'injection. Alors pour $p > n$ on a $i^\star\alpha = 0$, et par conséquent $Z^p(M,N) = Z^p(M)$. Pour $q > n+1$, et $\alpha = \mathbf{d}\beta$ une q-forme sur M, alors $i^\star\alpha = i^\star\mathbf{d}\beta = \mathbf{d}i^\star\beta$ et donc $B^q(M,N) =$

$B^q(M)$. Par conséquent $H^p(M, N) \simeq H^p(M)$.
Les mêmes arguments sont valables pour les formes à support compacte.

q.e.d

Théorème 4.2.2 (Théorème d'excision)
Soient N une sous-variété fermée de dimension m de M et P une sous-variété fermée de dimension m de M contenue dans l'intérieur de N. Soit encore U l'intérieur de P (ici intérieur est pris au sens topologique). Alors l'inclusion $j : (M \setminus U, N \setminus U) \to (M, N)$ induit des isomorphismes $j^\star : H^\star(M, N) \to H^\star(M \setminus U, N \setminus U)$ et $j^\star : H_c^\star(M, N) \to H_c^\star(M \setminus U, N \setminus U)$.

Démonstration. Soit $j^\star$ l'homomorphisme de $\Lambda(M, N)$ dans $\Lambda(M \setminus U, N \setminus U)$ induit par j. Clairement $j^\star$ est surjective par restriction. Soit maintenant α une k-forme sur (M, N) qui s'annule sur $(M \setminus U, N \setminus U)$. Alors α s'annule sur $M \setminus U$, et par définition sur N. Comme $M \setminus U \cup N = M$, α est nul sur tout M et donc $\ker j^\star = 0$.

q.e.d

Définition 4.2.3
Soient f et g deux applications différentiables d'une variété M dans une variété V telles que $f(N)$ et $g(N)$ soient contenues dans une même sous-variété fermée W de V. L'application f est différentiablement homotope à g relativement à N et W *s'il existe une application différentiable $K : M \times \mathbb{R} \to V$ ayant les propriétés suivantes :*

(*i*) $K(x, t) = f(x)$ *pour* $t \leq 0$;

(*ii*) $K(x, t) = g(x)$ *pour* $t \geq 1$;

(*iii*) $K(N \times \mathbb{R}) \subset W$.

K est appelé homotopie différentable de f à g relativement à N et W.

On peut remarque que cela définit une relation d'équivalence.

Théorème 4.2.4
Soient f et g deux applications différentiables de M vers V telles que $f(N)$ et $g(N)$ soient contenues dans W. Si f et g sont différentiablement homotopes relativement à N et W, alors les homomorphismes $f^\star$ et $g^\star$ de $H(V, W)$ dans $H(M, N)$ sont égaux.

La preuve de ce théorème est identique à celle du lemme 1.3.2.

4.3 Cohomologie relative à supports compacts

Soit U l'ouvert de $M \backslash N$ de M, et soit α une forme différentielle à support compact sur U. En prolongeant α par zéro sur $M \setminus N$, on obtient une forme différentielle à support compact sur M. On définit ainsi un homomorphisme $\omega_{M,U}$ de l'algèbre gradué $\Lambda_c(U)$ dans $\Lambda_c(M)$. Clairement, cet homomorphisme commute avec $\mathbf{d}$, ainsi il induit une homomorphisme, noté ω, de $H_c(U)$ dans $H_c(M)$.
Remarquons que $\omega(\Lambda_c(U))$ est contenu dans $\Lambda_c(M,N)$. Par conséquent, ω se factorise en une homomorphisme $x : H_c(U) \to H_c(M,N)$ et un homomorphisme $j^\star : H_c(M,N) \to H_c(M)$, i.e le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} H_c(U) \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "x"'] & & H_c(M) \\ & H_c(M,N) \arrow[ur, "j^\star"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Théorème 4.3.1 (Théorème d'excision forte)
L'homomorphisme $x : H_c(U) \to H_c(M,N)$ est un isomorphisme.

Théorème 4.3.2 (Théorème du voisinage tubulaire)
Soit N une sous-variété fermée de la variété différentielle M. Alors il existe une sous-variété fermée T de dimension m de M contenant N et une rétraction différentiable $r : T \to N$ ayant les propriétés suiavntes :

(*i*) *N est contenue dans l'intérieur de T ;*

(*ii*) *$r : T \to N$ est propre ;*

(*iii*) *si j désigne l'injection de N dans T, alors l'application $j \circ r : T \to T$ est différentable et proprement homotope à l'identité sur T.*

Obn trouve la preuve dans Munkres [3].
Dans ces conditions, $j^\star : H_c(T) \to H_c(N)$ est un isomorphisme.

Démonstration du théorème d'excision forte. Nous utiliserons les notations du théorème 4.3.2.
x est surjectif : Soit $\alpha \in Z_c(M,N)$. Puisque α est nulle sur N, il existe une forme $\beta \in \Lambda_c(T)$ telle que $\alpha = \mathbf{d}\beta$ sur T. Ainsi, soit $\gamma \in \Lambda_c(M)$ une forme sur M telle que $\gamma = \beta$ sur T. La forme $\alpha' = \alpha - \mathbf{d}\gamma$ est une forme fermée à support compact cohomologue à α est nulle sur T, donc apartenant à $Z_c(U)$.
x est injectif : Soient $\alpha \in Z_c(U)$ et $\beta \in \Lambda_c(M,N)$ telle que $\omega(\alpha) = \mathbf{d}\beta$. On peut supposer que T ne rencontre pas le support de α. Dans ces conditions,

$\mathbf{d}\beta$ est nulle sur T. Puisque β est nulle sur N, il existe une forme $\gamma \in \Lambda_c(T)$ telle que $\beta = \mathbf{d}\gamma$ sur T, et une forme $\gamma' \in \Lambda_c(M)$ telle que $\gamma' = \gamma$ sur T. La forme $\beta' = \beta - \mathbf{d}\gamma'$ est nulle sur T ; elle est donc dans $\Lambda_c(U)$, et on a sur U $\mathbf{d}\beta' = \mathbf{d}\beta = \alpha$, et donc x est injectif.

q.e.d

4.4 Homomorphismes cobord

Théorème 4.4.1
Soit M une variété différentable de dimention m, et soient N une sous-variété fermée de dimension n de M et i l'injection de N dans M. Pour toute p-forme différentielle α sur N, il exite une p-forme différentielle β sur M telle que $i^\star\beta = \alpha$.

Démonstration. Soit (U_j, ϕ_j) une famille de cartes locales de M ayant les propriétés suivantes :

(i) U_j est un ouvert relativement compact de M ;

(ii) tout compact de M ne rencontre qu'un nombre fini d'ouverts U_j ;

(iii) $N \subset \bigcup U_j$;

(iv) $\phi_j(U_j) = \mathbb{R}^m$;

(v) $\phi_j(U_j \cap N) = \mathbb{R}^n$.

Une telle famille existe toujours, par les propriétés d'une variété. Remarquons ensuite que la famille $(V_j) = (U_j \cap N)$ est un recouvrement ouvert de N, et $\psi_j = \phi_j|_{V_j}$ est un difféomorphisme de V_j sur $\mathbb{R}^n$.
Soit ω_j la p-forme différentielle sur $\phi_j(V_j)$ telle que $\phi^\star(\omega_j) = \alpha|_{V_j}$. Soit encore r_j la rétraction par déformation différentable de $\phi_j(U_j)$ sur $\psi_j(V_j)$. Alors $\tau_j = r_j^\star(\omega_j)$ est une forme différentielle sur $\phi_j(U_j)$ qui prolonge ω_j. De plus, si ω_j est nulle, alors τ_j l'est aussi.
Soit (θ_j) une partition différentiable de l'unité ,subordonnée au recouvrement (U_j), de l'ouvert $U = \bigcup U_j$. La forme différentielle $(\theta|_{U_j})\phi_j^\star(\tau_j)$ se prolonge, par zéro, en une forme différentielle β_j sur M à support dans U_j. Par conséquent, la famille (β_j) est localement finie.
On pose alors $\beta = \sum \beta_j$, on a $i^\star\beta = \alpha$. De plus, si α est à support compact dans N, on a $\omega_j = 0$, sauf pour un nombre fini d'indice j. La somme $\beta = \sum \beta_j$ est donc finie et ainsi β est à support compact sur M.

q.e.d

Soit N une sous-variété fermée non vide de M et P une sous-variété fermée de N. Pour $\alpha \in Z^p(N, P)$ une p-forme fermée sur N nulle sur P et

$\beta \in \Lambda^p(M)$ donnée par le théorème. On a ainsi $i^\star(\mathbf{d}\beta) = \mathbf{d}(i^\star\beta) = \mathbf{d}\alpha = 0$ et donc $\mathbf{d}\beta$ est dans $Z^{p+1}(M, N)$.

Lemme 4.4.2
La classe de cohomologie de $\mathbf{d}\beta$ *dans* $H^{p+1}(M, N)$ *ne dépend que de la classe de cohomologie de* α *dans* $H^p(N, P)$

Démonstration. Soit γ une p-forme différentielle sur M telle que $i^\star\gamma = \alpha$. On a donc $\mathbf{d}\beta = \mathbf{d}\gamma + \mathbf{d}(\beta - \gamma)$, avec $\beta - \gamma \in \Lambda^p(M, N)$.Ainsi, les classes de cohomologie de $\mathbf{d}\beta$ et de $\mathbf{d}\gamma$ coïncident dans $H^{p+1}(M, N)$, et donc les classes de cohomologie ne dépendent pas du choix de β.
D'autre part, soit $\alpha' = \alpha + \mathbf{d}\rho$, $\rho \in \Lambda^{p-1}(N, P)$, une p-forme fermée sur N cohomologue à α dans $Z^p(N, P)$. Par le théorème précédent, on a $\sigma \in \Lambda^{p-1}(M)$ une $p-1$-forme sur M telle que $i^\star\sigma = \rho$. Ainsi on a $i^\star(\beta + \mathbf{d}\sigma) = \alpha'$ et $\mathbf{d}(\beta + \mathbf{d}\sigma) = \mathbf{d}\beta$.

q.e.d

On notera par $\delta : H^p(N, P) \to H^{p+1}(M, N)$ la correspondance définie par le théorème.

Lemme 4.4.3
L'application δ *est un homomorphisme d'espaces vectoriels.*

Définition 4.4.4
L'application δ *est appelé* homomorphisme de cobord du triplet (M, N, P).

Proposition 4.4.5
Soit f *une application différentable de* M *dans une variété différentable* V *telle que* $f(N)$ *soit contenu dans une sous-variété fermée* W *de* V*, et* $f(P)$ *dans une sous-variété fermée* X *de* W*. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H^p(W,X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f^\star"'] & H^{p+1}(V,W) \arrow[d, "f^\star"] \\ H^p(N,P) \arrow[r, "\delta"'] & H^{p+1}(M,N) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Soit j l'inclusion de W dans V et α une p-forme fermée sur W nulle sur X. Soit β une p-forme sur V telle que $j^\star\beta = \alpha$. On a $i^\star(f^\star\beta) = f^\star(j^\star\beta) = f^\star\alpha$ et $\mathbf{d}(f^\star\beta) = f^\star(\mathbf{d}\beta)$. q.e.d

CHAPITRE 5

Théorème de Kunneth

5.1 Introduction

Définition 5.1.1
Soient $A = \bigoplus A_p$ et $B = \bigoplus B_p$ deux algèbres réelles graduées et anticommutatives. L'espace vectoriel $A \otimes B$, appelé produit tensoriel des espaces A et B, *est définit par la somme directe des sous-espaces*

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{p+q=n} A_p \otimes B_q.$$

On définit de plus une structure d'algèbre réelle graduée et anticommutative sur le produit tensoriel $A \otimes B$ en posant

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{qp'}(aa') \otimes (bb'), \quad (b, a') \in B_q \times A_{p'}.$$

*On note alors aussi $A \otimes B$ l'*algèbre produit tensoriel *des algèbres graduées A et B.*

Pour deux fonctions f et g de A (resp. B) dans C, où A, B, C sont des algèbres anticommutatives, on définit une unique application $f : A \otimes B \to C$ telle que $f(a \otimes b) = g(a)h(b)$. En effet, pour $a \otimes b \in A_p \otimes B_q \subset (A \otimes B)_n$, on définit $f(a \otimes b) = g(a)h(b) \in C_{p+q} = C_n$, donc de manière unique et bien définie.

Lemme 5.1.2
Pour N et M des variétés sans bords et P une sous variété fermée de M et pour p_1 et p_2 les projections de $M \times N$ sur M et N respectivement, il existe un homomorphisme K de l'algèbre produit tensoriel $H(M,P) \otimes H(N)$ dans l'algèbre de cohomologie $H(M \times N, P \times N)$ tel que $K(a \otimes b) = (p_1^\star a)(p_2^\star b)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la remarque précédent le lemme.

q.e.d

Lemme 5.1.3
Le diagramme

$$\begin{tikzcd} H(P) \otimes H(N) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\delta\otimes 1"'] & H(P \times N) \arrow[d, "\delta\times 1"] \\ H(M,P) \otimes H(N) \arrow[r, "K"'] & H(M \times N, P \times N) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Soit $a \otimes b \in H(P)^p \otimes H(N)^q$ où $p + q = n$. Alors

$$\begin{aligned} (\delta \times 1) \circ K(a \otimes b) &= (\delta \times 1)((p_1^\star a)(p_2^\star b)) \\ &= \delta \circ p_1^\star(a) \cdot p_2^\star(b). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} K \circ (\delta \otimes 1)(a \otimes b) &= K(\delta a \otimes b) \\ &= p_1^\star \circ \delta(a) \cdot p_2^\star(b). \end{aligned}$$

Or, par le théorème 4.4.5, $\delta \circ p_1^\star = p_1^\star \circ \delta$.

q.e.d

Lemme 5.1.4
Soient W, V des variétés différentiables et X une sous variété fermée de v. Soit f (resp. g) une application différentiable de (M,P) dans (V,X) (resp. de N dans W). Alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} H(V,X) \otimes H(W) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "f^\star\otimes g^\star"'] & H(V \times W, X \times W) \arrow[d, "(f\times g)^\star"] \\ H(M,P) \otimes H(N) \arrow[r, "K"'] & H(M \times N, P \times N) \end{tikzcd}$$

commute.

Démonstration. Il s'agit d'une généralisation du lemme précédent.

q.e.d

Lemme 5.1.5
Soit D l'application diagonale de N dans $N \times N$. On a $D^\star(K(a \otimes b)) = ab$.

Démonstration. Remarquons que $p_i^\star = \mathrm{Id}_N \times 1$. Ainsi $D^\star(K(a \otimes b)) = D^\star(a, b) = ab$.

q.e.d

Lemme 5.1.6
Soit π l'isomorphisme de $H(N)$ sur $H(D^m) \otimes H(N)$ définit par $a \longmapsto 1 \otimes a$. On a $K = p_2^\star \circ \pi^{-1}$.
Par conséquent, K est un isomorphisme de $H(D^m) \otimes H(N)$ sur $H(D^m \times N)$.

Démonstration. En effet, $p_2^\star \circ \pi^{-1}(b \otimes a) = p_2^\star(a) = p_1^\star(b) p_2^\star(a)$.

q.e.d

Théorème 5.1.7 (Théorème de Kunneth)
L'homomorphisme

$$K : H(M, P) \otimes H(N) \to H(M \times N, P \times N)$$

est un isomorphisme.

Corollaire 5.1.8
Si M et N sont compactes, on a

$$b_q(M \times N, P \times N) = \sum_{r+s=q} b_r(M, P) b_s(N).$$

Corollaire 5.1.9
Soit $T^m = (S^1)^m$ le tore de dimension m. Alors la dimension de $H^q(T^m)$ est

$$b_p(T^m) = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Par récurence : $b_0(S^1) = b_1(S^1) = 1$ et $b_q(S^1) = 0$ pour $q \neq 0, 1$. Le théorème de Kunneth nous fournit le pas de récurence.

q.e.d

Corollaire 5.1.10
La sphère S^m n'a pas le type d'homotopie d'un produit de sphère.

Démonstration. Supposons que S^m ait le type d'homotopie du produit $S^p \times S^q$, $p \leq q$. Alors par le corollaire 5.1.8, $p + q = m$. Par conséquent :

(i) Si m est nul, p et q le sont aussi ; ce qui est imposible car $b_0(S^0) = 2$ et $b_0(S^0 \times S^0) = 4$;

(ii) Si m n'est pas nul, alors p ne l'est pas non plus et on a

$$0 = b_p(S^m) = \begin{cases} b_p(S^p) = 1 & \text{pour} \quad p < q \\ 2b_p(S^p) = 2 & \text{pour} \quad p = q \end{cases}$$

ce qui est absurde.

q.e.d

5.2 Éléments de la théorie de Morse

Définition 5.2.1
soit M une variété différentiable et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur M. Un point x de M est un point critique *de f si le rang de f en x est nul. Un nombre réel c est une* valeur critique *(resp. une* valeur régulière*) de f si le sous-ensemble $f^{-1}(c)$ contient un (resp. ne contient aucun) point critique de f. En particulier, tout nombre n'appartenant pas à l'image de f est nue valeur régulière de f.*
*L'*indice *d'un point critique x de f est la dimension du plus grand sous-espace de $T_x(M)$ sur lequelle la matrice hessienne de f en x est définie négative.*
Le point critique x est non-dégénéré *si la matrice hessienne de f en x est une forme bilinéaire non dégénérée sur $T_x(M)$.*

Lemme 5.2.2 (Lemme de Morse)
Soit $x \in M \setminus \partial M$ un point critique non dégénéré d'indice p de f. Alors il existe un système $(y_1, \ldots, y_m)$ de coordonnées locales sur un voisinage ouvert U de x ayant les propriétés suivantes :

(i) $y_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, m$ *;*

(ii) $f|_U = f(x) - y_1^2 - \cdots - y_p^2 + y_{p+1}^2 + \cdots + y_m^2$.

Les points critiques non dégénérés de f sont donc isolés. Par conséquant, f ne possède sur tout compact de P qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés.

Théorème 5.2.3
Soit M une variété différentiable ayant un bord compact. Il existe une donction différentiable f de m ayant les propriétés suivantes :

(i) *f est propre ;*

(*ii*) *0 est une valeur régulière de* f *;*

(*iii*) $f^{-1}(0) = \partial M$ *;*

(*iv*) *les points critiques de* f *sont non dégénérés ;*

(*v*) *si* x *et* y *sont deux points critiques distincts de* f*, alors les valeurs critiques* $f(x)$ *et* $f(y)$ *sont distinctes.*

Un tel f est appelé *fonction de Morse sur* M.
On suppose maintenant que f est une fonction de Morse positive sur M. Les valeurs critiques de f sont alors isolées et strictement positives. Pour tout nombre a, on désigne par M_a (resp. M^a) le sous espace $f^{-1}([0,a])$ (resp. $f^{-1}(a)$). Si $a \in f(M)$ est une valeur régulière strictement positive de f, M_a est une sous-variété compacte de dimension m de M ayant $\partial M \cup M^a$ pour bord.

Proposition 5.2.4
Soit $[a,b]$ *un intervalle compact de* $f(M)$ *contenant une seule valeur critique* c*,* $a < c < b$*, de* f*, et* p *l'indice du point critique correspondant. On a :*

$$H^q(M_b, M_a) = \begin{cases} 0 & \textit{pour} \quad q \neq p \\ \mathbb{R} & \textit{pour} \quad q = p. \end{cases}$$

Corollaire 5.2.5
Si tous les espaces $H^q(M_a)$ *sont de dimensions finies, alors il en est de même des espaces* $H^q(M,b)$*.*

Théorème 5.2.6 (Théorème de finitude)
Les espaces de cohomologie d'une variété compacte sont de dimensions finies.

Démonstration. La démonstration se fait par récurence sur la dimension m de M. Le résultat est immédiat pour $m = 0$.
Soit f une fonction de Morses positive sur M. Soient $0 < c_1 < \cdots < c_r$ les valeurs critiques de f et $(a_i)_{i=0}^r$ une suite de nombres telle que

$$0 < a_0 < c_1 < a_1 < \cdots < a_{r-1} < c_r < a_r.$$

La variété M_{a_0} (éventuellement vide) a le type d'homotopie de ∂M, elle a donc des espaces de cohomologie de dimensions finies par hypothèse de récurence. En itérant le corollaire 5.2.5, il en est de même pour toutes les variétés M_{a_i}, en particulier pour la variété $M = M_{a_r}$.

q.e.d

5.3 Démonstration

Théorème 5.3.1
Si M est une variété différentiable compacte, alors l'homomorphisme K : $H(M) \otimes H(N) \to H(M \times N)$ est un isomorphisme.

Nous démontrerons ce cas particulier par récurrence sur la dimension de M, le résultat étant immédiat pour $m = 0$.
Soit f une fonction de Morses positive sur M. Il suffit alors de vérifier la proposition suivante (c.f. la démonstration du théorème 5.2.6) :

Proposition 5.3.2
Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $[0, +\infty[$ contenant une seule valeur critique c, $a < c < b$, de f. Si l'homomorphisme

$$K : H(M_a) \otimes H(N) \to H(M_a \times N)$$

est un isomorphisme, alors il en est de même pour l'homomorphisme

$$K : H(M_b) \otimes H(N) \to H(M_b \times N).$$

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 5.3.3
Pour tous entiers p, q, $p > 0$, la suite suivante

$$0 \longrightarrow H^q(D_p \times N) \longrightarrow H^q(S^{p-1} \times N) \longrightarrow H^{q+1}(D^p \times N, S^{p-1} \times N) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Puisque la projection $p_2 : S^{p-1} \times N \to N$ admet une section (c.f. 4.3.1), l'homomorphisme $p_2^\star : H(N) \to H(S^{p-1} \times N)$ est injectif. On déduit donc du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H(D^p \times N) \arrow[r] & H(S^{p-1} \times N) \\ H(N) \arrow[u, "p_2^\star", "\simeq"'] \arrow[ur, "p_2^\star"'] & \end{tikzcd}$$

que l'homomorphisme $H(D^p \times N) \to H(S^{p-1} \times N)$ est aussi injectif. Le reste de la suite est une conséquence immédiate de la suite exacte de cohomologie du couple $(D^p \times N, S^{p-1} \times N)$.

q.e.d

Lemme 5.3.4
Pour tous entiers p, q, $0 < p \leq m$, l'homomorphisme $K : H^p(D^p, S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \to H^q(D^p \times N, S^{p-1} \times N)$ est un isomorphisme.

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant dans lequel les deux lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{p-1}(D^p) \otimes H^{q-p}(N) \arrow[r] \arrow[d, "K"] & H^{p-1}(S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \arrow[r] \arrow[d, "K"] & H^p(D^p, S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \arrow[r] \arrow[d, "K"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{q-1}(D^p \times N) \arrow[r] & H^{q-1}(S^p - 1 \times N) \arrow[r] & H^q(D^p \times N, S^{p-1} \times N) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

De plus, par hypothèse de récurrence du théorème 5.3.2, K est un isomorphisme de $H^0(S^{p-1}) \otimes H^{q-1}(N) + H^{p-1}(S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N)$ sur $H^{q-1}(S^{p-1} \times N)$ pour $p > 1$ et de $H^0(S^0) \otimes H^{q-1}(N)$ sur $H^{q-1}(S^0 \times N)$ pour $p = 1$. Par conséquent :

(i) pour $p = 1$, les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes, et il en est de même pour la troisième par le lemme des cinq ;

(ii) pour $p > 1$, l'homomorphisme

$$H^{p-1}(S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \to H^p(D^p, S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N)$$

et l'homomorphisme composé

$$H^{q-1}(D^p \times N) \to H^{q-1}(S^p - 1 \times N) \to H^q(D^p \times N, S^{p-1} \times N)$$

sont des isomorphismes. Il en est donc de même pour l'homomorphisme

$$K : H^p(D^p, S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \to H^q(D^p \times N, S^{p-1} \times N).$$

q.e.d

Démonstration du théorème 5.3.2. Soit p l'indice du point critique de f correspondant à la valeur critique c. Si p est nul, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H(M_b) \otimes H(N) \arrow[r, "\simeq"] & H(M_a) \otimes H(N) \arrow[d, "K"', "\approx"] & + & H(D^m) \otimes H(N) \arrow[d, "K"', "\approx"] \\
H(M_b \times N) \arrow[r, "simeq"'] & H(M_a \times N) & + & H(D^m \times N).
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, lemme 5.1.6, $K : H(M_b) \otimes H(N) \to H(M_b \times N)$ est un isomorphisme.

Supposons maintenant p non nul. Il faut alors vérifier que, pour tout entier q, K est un isomorphisme de $\sum_{r+s=q} H^r(M_b) \otimes H^s(N)$ sur $H^q(M_b \times N)$.
On déduit de l'exactitude de la suite

$$H^{q-1}(M_a) \longrightarrow H^q(M_b, M_a) \longrightarrow H^q(M_b) \longrightarrow H^q(M_a) \longrightarrow H^{q+1}(M_b, M_a)$$

que les deux colonnes du diagramme commutatif suivant sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
\sum_{r+s=q-1} H^r(M_a) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K", "\simeq"'] \arrow[d] & H^{q-1}(M_a \times N) \arrow[d] \\
\sum_{r+s=q} H^r(M_b, M_a) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K"] \arrow[d] & H^q(M_b \times N, M_a \times N) \arrow[d] \\
\sum_{r+s=q} H^r(M_b) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K"] \arrow[d] & H^q(M_b \times N) \arrow[d] \\
\sum_{r+s=q} H^r(M_a) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K", "\simeq"'] \arrow[d] & H^q(M_a \times N) \arrow[d] \\
\sum_{r+s=q+1} H^r(M_b, M_a) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K"] & H^{q+1}(M_b \times N, M_a \times N).
\end{tikzcd}$$

Il suffit maintenant (lemme des cinq) de vérifier que pour tout entier q, l'homomorphisme

$$K : \sum_{r+s=q} H^r(M_b, M_a) \otimes H^s(N) = H^p(M_b, M_a) \otimes H^{q-p(N)} \to H^q(M_b \times N, M_a \times N)$$

est un isomorphisme.
On pose alors

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_b &= M_b \setminus M^b, \\
V_1 &= \tilde{M}_b \setminus \left\{ z \in U \cap \tilde{M}_b \mid \sum_{i=1}^{p} y_i^2(z) < \frac{\varepsilon}{4} \right\}, \\
V_2 &= \tilde{M}_b \setminus \left\{ z \in U \cap \tilde{M}_b \mid \sum_{i=1}^{p} y_i^2(z) < \frac{\varepsilon}{8} \right\}, \\
W_1 &= \left\{ z \in U \cap \tilde{M}_b \mid \sum_{i=1}^{p} y_i^2(z) \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\}, \\
W_2 &= \left\{ z \in U \cap \tilde{M}_b \mid \frac{\varepsilon}{8} \leq \sum_{i=1}^{p} y_i^2(z) \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\}.
\end{aligned}$$

où les y_j sont ceux du lemme de Morse 5.2.2. Par le théorème 5.2.4, on a le diagramme commutatif suivant dans lequel les colonnes sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
H^p(M_b, M_a) \otimes H^{q-p}(N) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\approx"'] & H^q(M_b \times N, M_a \times N) \arrow[d, "\approx"] \\
H^p(\tilde{M}_b, M_a) \otimes H^{q-p}(N) \arrow[r, "K"] & H^q(\tilde{M}_b \times N, M_a \times N) \\
H^p(\tilde{M}_b, V_2) \otimes H^{q-p}(N) \arrow[r, "K"] \arrow[u, "\approx"] \arrow[d, "\approx"'] & H^q(\tilde{M}_b \times N, V_2 \times N) \arrow[u, "\approx"'] \arrow[d, "\approx"] \\
H^p(W_1, W_2) \otimes H^{q-p}(N) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\approx"'] & H^q(W_1 \times N, W_2 \times N) \arrow[d, "\approx"] \\
H^p(D^p, S^{p-1}) \otimes H^{q-p}(N) \arrow[r, "K"] & H^q(D^p \times N, S^{p-1} \times N).
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, le lemme 5.3.4 nous dit que l'homomorphisme

$$K : H^p(M_b, M_a) \otimes H^{q-p}(N) \to H^q(M_b \times N, M_a \times N)$$

est un isomorphisme.

q.e.d

Théorème 5.3.5
Si M est une variété compacte, l'homomorphisme

$$K : H(M, P) \otimes H(N) \to H(M \times N, P \times N)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il suffit d'apliquer le lemme des cinq au diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\sum_{r+s=q-1} H^r(M) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K", "\simeq"'] \arrow[d] & H^{q-1}(M \times N) \arrow[d] \\
\sum_{r+s=q-1} H^r(P) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K", "\simeq"'] \arrow[d] & H^{q-1}(P \times N) \arrow[d] \\
\sum_{r+s=q} H^r(M,P) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K"] \arrow[d] & H^q M(\times N, P \times N) \arrow[d] \\
\sum_{r+s=q} H^r(M) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K", "\simeq"'] \arrow[d] & H^q(M \times N) \arrow[d] \\
\sum_{r+s=q} H^r(P) \otimes H^s(N) \arrow[r, "K", "\simeq"'] & H^q(P \times N).
\end{tikzcd}
$$

q.e.d

Théorème 5.3.6
Si N est une variété différentiable compacte, l'homomorphisme $H(M,P) \otimes H(N) \to H(M \times N, P \times N)$ est un isomorphisme.

Démonstration. D'après la démonstration précédente, il suffit de vérifier ce résultat lorsque P est vide. Ainsi, on a le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
H(M) \otimes H(N) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\simeq"'] & H(M \times N) \arrow[d, "\simeq"] \\
H(M \setminus \partial M) \otimes H(N) \arrow[r, "K"'] & H((M \setminus \partial M) \times N).
\end{tikzcd}
$$

Or par le théorème 5.3.2, l'homomorphisme

$$K : H(M \setminus \partial N) \otimes H(N) \to H((M \setminus \partial M) \times N)$$

est un isomorphisme. q.e.d

Exemple 5.3.7
On peut à présent calculer la comomologie de Σ_g :
Pour $n > 1$, la suite de Mayer-Vietoris pour $\Sigma_g = \Sigma_{g-1} \cup T^1$ nous donne la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H^n(\Sigma_g) \longrightarrow H^n(T^1) \oplus H^n(\Sigma_{g-1}) \longrightarrow 0.$$

Or on vient de voir que $H^n(T^1) = 0$ et donc $H^n(\Sigma_g) = H^n(\Sigma_1) = H^n(T^1) = 0$.
Dans le cas $n = 0$, on a $H^0(\Sigma_g) = 0$ par connexité. Pour $n = 1$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\Sigma_g) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus H^1(\Sigma_{g-1}) \longrightarrow 0.$$

Et donc

$$H^1(\Sigma_g) = \mathbb{R} \oplus H^1(\Sigma_{g-1})/0 = \mathbb{R} \oplus H^1(\Sigma_{g-1}).$$

Bibliographie

[1] Claude Godbillon. *Éléments de topologie algébrique.* Hermann, Paris, 1971.

[2] Ib Madsen and Jørgen Tornehave. *From calculus to cohomology.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. de Rham cohomology and characteristic classes.

[3] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology.* Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.

[4] I. M. Singer and J. A. Thorpe. *Lecture notes on elementary topology and geometry.* Springer-Verlag, New York, 1976. Reprint of the 1967 edition, Undergraduate Texts in Mathematics.

Bilan personnel